Vlastní čísla, vlastní vektory – řešené příklady

Doplňkový učební text ke cvičením pro výuku předmětu Lineární algebra a aplikace, letní semestr školního roku 2010/11

Autor: Martin Žáček, katedra fyziky, Fakulta Elektrotechnická, ČVUT

Literatura: *Teorie:* ftp://math.feld.cvut.cz/pub/kalous/laa/prednasky/vlastvekt.pdf

Příklady: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/kalous/laa/cviceni/cvic16.pdf

1. Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory matice **A**.

$$\text{(a)}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ \text{(b)}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&0&2\\-2&2&1\end{pmatrix},\ \text{(c)}\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-1&5&-1\\-4&8&-1\end{pmatrix}.$$

Řešení: (a)

$$\det\left[\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}-\lambda\mathbf{E}\right]=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&1&-1\\0&2-\lambda&0\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Sarusovo}\\ \text{pravidlo}}}{=}(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+2-\lambda=$$

$$=-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8\underset{\substack{\uparrow\\ \text{podmínka na}\\ \text{vlastní čísla}}}{=}0$$, to je algebraická rovnice 3. stupně, zkoušíme hledat celočíselné kořeny, po vyloučení ±1 nalézáme (metodou hádání a ověřování výpočtem Hornerovým schématem) trojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2,3}=2$.

Rovnice na vlastní vektory vede na soustavu rovnic, jejímž řešením jsou koeficienty vlastního vektou **u** (připomeňme, že homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení, v tomto případě vždy nekonečně mnoho, neboť předchozí podmínka si vynutí singulární matici):

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&1&-1\\0&2-\lambda&0\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3-\lambda&1&-1\\0&2-\lambda&0\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix},$$

Řešení je dvojdimenzionální, způsob nalezení báze řešení je látkou kapitoly o soustavách lineárních rovnic, jedno z možných tvarů řešení je např. $(u_1, u_2, u_3) = r(1, 0, 1) + s(0, 1, 1)$.

(b): Další řešení již uvedeme stručněji, postup je obdobný: $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$ s kořeny $\lambda_1=1$, $\lambda_3=3$, $\lambda_3=-2$, pro každý kořen dostaneme jinou soustavu rovnic, uvedeme již jen vždy výchozí matici soustavy, výsledek po úpravě GEM a možný tvar řešení:

$$\lambda=1:\begin{pmatrix}0&2&-2\\-1&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$, báze řešení $(u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 1)$,

$$\lambda=3:\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-1&-3&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3&-1&0\\1&3&-2\end{pmatrix}$$, báze řešení $(v_1, v_2, v_3) = (-1, 3, 5)$,

$$\lambda=-1:\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$$, báze řešení $(w_1, w_2, w_3) = (2, -1, 2)$.

2. Rozhodněte, zda je matice **A** podobná diagonální matici.

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ (b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) charakteristický polynom má tvar $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$, vlastní čísla jsou 1, 2 a −1. Protože platí tvrzení, že má-li matice navzájem různá vlastní čísla, je podobná diagonální matici, je i matice **A** podobná diagonální matici.

(b) charakteristický polynom má tvar $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$, vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 3$. V této fázi výpočtu nemůžeme o podobnosti s diagonální maticí rozhodnout, protože předchozí zmíněné tvrzení neplatí obráceně. Musíme ke každému vlastnímu číslu zjistit dimenzi prostoru vlastních vektorů:

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ dimenze řešení je 1,}$$

$$\lambda = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dimenze řešení je 2.}$$

Protože platí tvrzení, že pokud jsou dimenze podprostorů vlastních vektorů rovny násobnostem jim odpovídajících vlastních čísel, je příslušná matice podobná diagonální matici, je i matice **A** podobná diagonální matici.

3. Rozhodněte, zda existuje báze v $\mathbb{R}^3$, vzhledem k níž je matice lineárního zobrazení A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonální. Najděte tuto bázi a odpovídající diagonální matici.

(a) $A(a, b, c) = (-2a + 2b + c, a + 2b - c, 2b - c)$,

(b) $A(a, b, c) = (b - c, -a + 2b + c, -2a + b + c)$,

Řešení: (a) Matici lineárního zobrazení vzhledem ke standardní bázi najdeme ze vztahu **AX** = **Y** kde **A** je hledaná matice lineárního zobrazení, **X** a **Y** jsou jednosloupcové matice ze souřadnic předmětu a obrazu (v té standardní bázi), matici najdeme bez počítání, uvedený vztah má tvar (souřadnice vektorů jsou ve standardní bázi rovny koeficientům vektorů):

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2b + c \\ a + 2b - c \\ 2b - c \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ je matice lineárního zobrazení.}$$

Charakteristický polynom matice **A** je $(2+\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)$, vyjde přímo v tomto tvaru, takže odpadá hledání jeho kořenů, která jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = -1$, příslušné vlastní vektory

$$\lambda = 2: \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \text{ báze řešení } (u_1, u_2, u_3) = (2, 3, 2),$$

$$\lambda = -2: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$, báze řešení $(v_1, v_2, v_3) = (6, -1, 2)$,

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, báze řešení $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 1)$.

Hledanou matici přechodu mezi bázemi a zároveň transformační matici mezi maticí **A** a podobnou diagonální maticí **D** tvoří sloupce (vybraných) vlastních vektorů, hledanou bázi najdeme z transformačního vztahu mezi původní (zde standardní) a hledanou bází:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ (f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)\mathbf{P} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= ((2, 3, 2), (6, -1, 2), (1, 0, 1))$, báze množinově zapsána $E = \{(2, 3, 2), (6, -1, 2), (1, 0, 1)\}$.

Poznámka: Na tomto příkladu je vhodné si ověřit také platnost maticového vztahu $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$, kde **D** je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále (viz odpřednášená teorie k lineárním prostorům se skalárním součinem). Zmíněný vztah si zapamatujete snadno, když si uvědomíte, že rovnosti po jednotlivých sloupcích jsou vlastně vztahy mezi vlastními čísly a vlastními vektory $\lambda_i\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{u}_i$ kde λ_i je vlastní číslo a $\mathbf{u}_i$ je odpovídající vlastní vektor. Také si vyzkoušejte, platnost transformačního vztahu $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, pro pohodlí čtenáře a pro kontrolu uvádíme ještě inverzní matici

$$\mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 8 & 8 & -20 \end{pmatrix}.$$

(b) Postupem stejným jako v (a) najdeme matici zobrazení $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

charakteristický polynom vyjde $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$, vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_{2,3} = 2$.

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, báze řešení $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 1)$,

$$\lambda = 2: \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, báze řešení $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (1, 3, 1)$.

Protože (dvojnásobnému) vlastnímu číslu 2 odpovídá pouze jednodimenzionální podprostor vlastních vektorů, matice **A** není podobná diagonální matici. Nalezneme tedy alespoň transformační matici, transformující matici **A** na Jordanův kanonický tvar. Definujeme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ jako první vektor řetězce zobecněných vlastních vektorů a spočítáme druhý vektor $\mathbf{v}_2$ ze soustavy

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)$, jedno z řešení je například $(-3, -5, 0)$. Transformační matice **P** bude složena ze sloupců **u**, $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ a pomocí ní vyjádříme Jordanův kanonický tvar **A**,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -13 & 6 & 13 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory, resp. řetězce zobecněných vlastních vektorů matice **A**. Najděte Jordanovu kanonickou matici, jíž je matice **A** podobná.

$$\text{(a)} \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \text{(b)} \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad se řeší obdobně jako **3**. (b), řešení se tu snad výhledově objeví.