Skalární součin – řešené příklady

Doplňkový učební text ke cvičením pro výuku předmětu Lineární algebra a aplikace, letní semestr školního roku 2010/11
Autor: Martin Žáček, katedra fyziky, Fakulta Elektrotechnická, ČVUT
Literatura: Teorie: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/kalous/laa/prednasky/unitprost.pdf
Příklady: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/kalous/laa/cviceni/cvic15.pdf

1. Ověřte zda následující vztahy definují skalární součin na lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$

(a) $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_3 + 2x_3y_2$
(b) $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$
(c) $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
(d) $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$

(a) neplatí komutativita; (b) ano; (c) ano; (d) ano;
nutno ověřit platnost všech axiomů platných pro skalární součin, pokud zjistíme neplatnost jediného, zbylé již není třeba ověřovat. Komutativita bude zachována, pokud výraz bude symetrický vzhledem k záměně $x\leftrightarrow y$, tedy je-li například ve skalárním součinu člen x_2y_3, musí být také obsažen podobný člen x_3y_2 se stejným číselným koeficientem. Distributivní zákon a axiom násobení konstantou si vynutí, že v každém členu skalárního součinu musí být vždy právě jeden koeficient z prvního a právě jeden z druhého vektoru. Poslední axiom, podle kterého je skalární součin vektoru sama se sebou větší nebo roven nule, se ověřuje vyšetřením smíšených členů (členů s nestejnými indexy, pouze ty mohou nabývat záporných hodnot) a jejich porovnáním s členy se stejnými indexy, které v tomto případě vyjdou s druhou mocninou a budou proto vždy kladné.
Např. (b) $(x_1, x_2, x_3)\cdot(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3 = x_1^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2x_3$, záporných hodnot může nabývat pouze poslední člen a to pouze tehdy, budou-li členy x_2, x_3 nabývat nenulových hodnot a stejných znamének. Prozkoumejme tento případ: druhý výraz $(x_2 + 2x_3)^2$ obsahuje kromě výrazů s druhými mocninami také smíšený člen $4x_2x_3$, který je v tomto případě kladný a v absolutní hodnotě vždy větší než poslední člen $-2x_2x_3$ se záporným znaménkem, výsledek proto bude vždy kladný. Podobně se vyšetří ostatní případy.

2. V lineárním prostoru polynomů nejvýše 2. stupně je definován skalární součin předpisem

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)\cdot(a_2x^2 + b_2x + c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + 2c_1c_2 + b_1c_2 + c_1b_2.$$

(a) Najděte ortonormální bázi tohoto lineárního prostoru, která obsahuje polynom x − 1.
(b) Spočtěte úhel polynomů $x^2 + 2x - 1$ a $2x^2 + x + 1$.
(c) Spočtěte parametr a tak, aby polynomy $x^2 + x + 1$ a $x^2 + ax - a$ byly na sebe kolmé.
(d) Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = \left\langle x^2+1, x+1, 2x^2-x+1 \right\rangle$.
(e) Najděte vektor z $W = \left\langle x^2+1, -x^2+x \right\rangle$ který je kolmý k vektoru $2x^2 + 2x - 1$ a má velikost 1.
(f) Najděte bázi ortogonálního doplňku k podprostoru $W = \left\langle x^2+1, x+1 \right\rangle$.

(a) Zvolíme (jakoukoliv ale jednoduchou s ohledem na snadnost výpočtů) bázi: $\left\{x+1, 1, x^2\right\}$, ortogonální bázi najdeme ortogonalizačním postupem Schmidta a Grama (všimněte si, že tečkou značíme skalární součin, který je nutno provést podle předpisu v zadání):

$\overline{u}=\overline{b}_1=x+1$,

$\overline{v}=\overline{b}_2-\dfrac{\overline{b}_2\cdot\overline{u}}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u}=1-\dfrac{1\cdot(x-1)}{\|x-1\|^2}(x-1)=1-\dfrac{-2+1}{1^2}(x-1)=x$,

$\overline{w}=\overline{b}_3-\dfrac{\overline{b}_3\cdot\overline{u}}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u}-\dfrac{\overline{b}_3\cdot\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\overline{v}=x^2-\dfrac{x^2\cdot(x-1)}{\|x-1\|^2}(x-1)-\dfrac{x^2\cdot x}{\|x\|^2}x=x^2-\dfrac{0}{1}(x-1)-\dfrac{0}{1}x=x^2$,

vektory ještě vydělíme jejich velikostmi, aby výsledná báze byla ortonormální:

$\left\{\dfrac{\overline{u}}{\|\overline{u}\|},\ \dfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|},\ \dfrac{\overline{w}}{\|\overline{w}\|}\right\}=\left\{\dfrac{x-1}{\|x-1\|},\ \dfrac{x}{\|x\|},\ \dfrac{x^2}{\|x^2\|}\right\}=\left\{x-1,\ x,\ x^2\right\}$.

(b) $\cos\alpha=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\|\overline{a}\|\|\overline{b}\|}=\dfrac{(x^2+2x-1)\cdot(2x^2+x+1)}{\|x^2+2x-1\|\|2x^2+x+1\|}=\dfrac{2+2-2+2-1}{\sqrt{3}\sqrt{9}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) $(x^2+x+1)\cdot(x^2+ax-a)=1+a-2a-a+a=1-a=0$, $a=1$.

(d) Nejprve najdeme bázi W (pomocí GEM v řádkovém podprostoru, W je zadána jako lineární obal generátorů ale nevíme, zda jde o bázi):

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $W=\langle x^2+1, x+1\rangle$,

dále použijeme Schmidtův-Gramův proces, podobně jako v (a):

$\overline{u}=\overline{b}_1=x^2+1$,

$\overline{v}=\overline{b}_2-\dfrac{\overline{b}_2\cdot\overline{u}}{\|\overline{u}\|^2}\overline{u}=x+1-\dfrac{(x+1)\cdot(x^2+1)}{\|x^2+1\|^2}(x^2+1)=x+1-\dfrac{3}{3}(x^2+1)=-x^2+x$

a jelikož v zadání byla požadována ortogonální báze, vydělíme velikostmi vektorů,

$\left\{\dfrac{\overline{u}}{\|\overline{u}\|},\ \dfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|}\right\}=\left\{\dfrac{x^2+1}{\|x^2+1\|},\ \dfrac{-x^2+x}{\|-x^2+x\|}\right\}=\left\{\dfrac{x^2+1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-x^2+x}{\sqrt{2}}\right\}$.

(e) Hledaný vektor napíšeme jako obecnou lineární kombinaci vektorů báze z podprostoru W a vyjádříme podmínku na kolmost k zadanému vektoru:

$\left[\alpha(x^2+1)+\beta(-x^2+x)\right]\cdot(2x^2+2x-1)=\left(x^2(\alpha-\beta)+\beta x+\alpha\right)\cdot(2x^2+2x-1)=$

$=2(\alpha-\beta)+2\beta-2\alpha-\beta+2\alpha=2\alpha-\beta=0$, za β tedy dosadíme 2α a vydělíme velikostí: $\alpha(x^2+1)+2\alpha(-x^2+x)=\alpha(-x^2+2x+1)$,

$\dfrac{\alpha(-x^2+2x+1)}{\|\alpha(-x^2+2x+1)\|}=\dfrac{\alpha(-x^2+2x+1)}{\alpha\sqrt{11}}=\dfrac{1}{\sqrt{11}}(-x^2+2x+1)$.

(f) $(ax^2+bx+c)\cdot(x^2+1)=0$; $(ax^2+bx+c)\cdot(x+1)=0$, po provedení skalárních součinů $a+2c+b=0$; $b+2c+b+c=0$, po zjednodušení $a+b+2c=0$; $2b+3c=0$, to je homogenní soustava lineárních rovnic, koeficienty b a c báze řešení určíme z druhé rovnice například jako $b=3$; $c=-2$ a z první rovnice dopočteme $a=1$, výsledná báze je $\{x^2+3x-2\}$.