# 4. Úpravy algebraických výrazů

**4.1. Mocniny s celým exponentem.** Pro libovolné reálné číslo $a$ a každé přirozené číslo $n$ je definována **$n$-tá mocnina čísla** $a$

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}}$$

Číslo $a$ se nazývá **základ mocniny**, $n$ se nazývá **exponent (mocnitel)**. Pro $a \neq 0$ definujeme

$$\boxed{a^0 = 1,\ a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n}$$

**4.2. Pravidla pro počítání s mocninami:** Pro $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a $r, s \in \mathbf{Z}$ platí vzorce

$$\boxed{\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ a^r : a^s &= a^{r-s} \\ (a^r)^s &= a^{rs} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}}$$

**4.3. Odmocniny.** Ke každému nezápornému číslu $a$ a ke každému přirozenému číslu $n$ existuje právě jedno nezáporné číslo $x$ tak, že

$$x^n = a\,.$$

Číslo $x$ se nazývá **$n$-tá odmocnina z čísla** $a$ a značí se $\sqrt[n]{a}$, kde $a$ je **základ odmocniny** a $n$ je **odmocnitel**. Je-li $n$ liché, definujeme $n$-tou odmocninu ze záporného reálného čísla $a$ předpisem

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}\,.$$

Platí tedy vztah

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n \quad \text{pro } a \in \mathbf{R} \text{ a } n \in \mathbf{N}, \text{ pokud } a \geq 0 \vee n \text{ liché}}$$

**4.4. Pravidla pro počítání s odmocninami:**

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b}, && a \geq 0 \wedge b \geq 0 \vee n \text{ liché} \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, && a \geq 0 \wedge b > 0 \vee b > 0 \wedge n \text{ liché} \\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \sqrt[n]{a^m}, && (a \geq 0 \vee n \text{ liché}) \wedge (a \neq 0 \wedge m \in \mathbf{Z} \vee m \in \mathbf{N}) \\ \sqrt[n]{a} &= \sqrt[np]{a^p}, && (a \geq 0 \vee n \text{ liché}) \wedge p \in \mathbf{N} \end{aligned}}$$

*Poznámka:* Nezaměňujte pojem

„$n$-tá odmocnina z čísla $a$“ (**je jediná**)

s pojmem

„kořen rovnice $x^n = a$“ (**kořenů je právě** $n$).

Např. $\sqrt{4} = 2$, kdežto $x^2 = 4 \Longrightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

**4.5. Mocniny s racionálním a reálným exponentem.** Definujeme

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{pro } a > 0,\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}}$$

Mocninu $a^r$ lze definovat i pro libovolné $x \in \mathbf{R}$. Vzorce z 4.2 pak platí pro $a, b > 0$ a všechna $r, s \in \mathbf{R}$.

**4.6. Algebraickým výrazem** rozumíme každý zápis, který je správně utvořen podle pravidel pro zápisy čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. **Definičním oborem** výrazu je množina všech čísel, pro které má výraz smysl. **Úprava výrazu** je nahrazení daného výrazu výrazem jiným, který je definován a nabývá stejné hodnoty jako daný výraz pro každé číslo z definičního oboru daného výrazu.

Výraz

$$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad \text{kde } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0}$$

se nazývá **polynom** nebo **mnohočlen** $n$**-tého stupně** ($n = 0, 1, 2, \ldots$) reálné proměnné $x$. Je-li $n = 0$ a $a_0 = 0$, pak mluvíme o nulovém polynomu. **Kořen polynomu** je každé reálné číslo, po jehož dosazení za proměnnou $x$ do daného polynomu a provedení příslušných algebraických operací dostaneme 0.

Při úpravách výrazů používáme následující vztahy, platné pro $a, b \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2\\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3\\
a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b)\\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\\
a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)\\
a^n + b^n &= (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right), \text{ je-li } n \text{ liché}\\
(a \pm b)^n &= \binom{n}{0}a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \pm \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}b^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{(tzv. binomický vzorec - viz kap. 13)}
\end{aligned}}$$

**Pozor!** Výraz $a^2 + b^2$ se v $\mathbf{R}$ nedá rozložit na součin.

**4.7. Řešené příklady.** Při úpravách výrazů je vždy součástí řešení úlohy stanovení podmínek, za kterých jsou definovány všechny operace obsažené v daném výrazu a v celém řešení.

1. Upravte
$$\frac{(-2ab^5)^3 \cdot (3^2a^3b)^2}{6^2a^{12}b^{14}} .$$

**Řešení:** Aby zlomek měl smysl, musí platit $a \neq 0$, $b \neq 0$. Upravíme použitím vzorců 4.2 a postupně dostaneme
$$\frac{(-2ab^5)^3 \cdot (3^2a^3b)^2}{6^2a^{12}b^{14}} = \frac{(-1)^3 2^3 a^3 (b^5)^3 \cdot 9^2 (a^3)^2 b^2}{36a^{12}b^{14}} = \frac{-8 \cdot 81 a^3 b^{15} a^6 b^2}{36a^{12}b^{14}}$$
$$= -18a^{3+6-12}b^{15+2-14} = -18a^{-3}b^3 = -18\left(\frac{b}{a}\right)^3 .$$

Výsledek: $-18\left(\frac{b}{a}\right)^3$ pro $ab \neq 0$.

2. Upravte
$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2 .$$

**Řešení:** Převedeme na společného jmenovatele, upravíme a umocníme:
$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1-2-2}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}\right)^2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}-2}\right)^2 = \frac{9}{2-4\sqrt{2}+4}$$
$$= \frac{9}{6-4\sqrt{2}} = \frac{9}{2(3-2\sqrt{2})} .$$

Poslední zlomek rozšíříme číslem $3+2\sqrt{2}$ a dostaneme
$$\frac{9}{2(3-2\sqrt{2})} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = \frac{9}{2}(3+2\sqrt{2}) .$$

Výsledek: $\frac{9}{2}(3+2\sqrt{2})$.

3. Upravte
$$\left(\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}\right)^{-1} .$$

**Řešení:** Aby zlomek měl smysl, musí platit $a > 0$. Přepíšeme na mocniny s racionálním exponentem a použijeme vzorce 4.2:
$$\left(\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}\right)^{-1} = \left(\frac{a^{1/2} \cdot a^{1/6}}{a^{1/3} \cdot a^{1/6}}\right)^{-1} = \left(a^{1/2+1/6-1/3-1/6}\right)^{-1} = a^{-1/6} .$$

Nyní použijeme 4.1 a usměrníme, tj. odstraníme odmocninu ze jmenovatele:
$$a^{-1/6} = \frac{1}{a^{1/6}} \cdot \frac{a^{5/6}}{a^{5/6}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{a} .$$

Výsledek: $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$ pro $a > 0$.

4. Upravte

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

**Řešení:** Aby měl zlomek smysl, musí platit $x^4 - 2x^2 + 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$. Rozložíme čitatele a jmenovatele a zkrátíme:

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{x(x^2-1) - (x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)(x-1)}{(x^2-1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Výsledek: $\dfrac{1}{x+1}$ pro $x \neq \pm 1$.

5. Upravte

$$\frac{4a^2 - 3a + 5}{a^3 - 1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} + \frac{6}{1-a}.$$

**Řešení:** Aby 1. a 3. zlomek měly smysl, musí platit $a^3 - 1 \neq 0$, což je v $\mathbf{R}$ ekvivalentní nerovnosti $a \neq 1$. Nejprve převedeme na společného jmenovatele a potom (druhý řádek) v čitateli roznásobíme a sloučíme:

$$\begin{aligned}
\frac{4a^2 - 3a + 5}{a^3 - 1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} + \frac{6}{1-a} &= \frac{4a^2 - 3a + 5 - (a-1)(1-2a) + 6(a^2+a+1)}{a^3-1} \\
&= \frac{4a^2 - 3a + 5 - a + 2a^2 + 1 - 2a + 6a^2 + 6a + 6}{a^3-1} \\
&= \frac{-12a}{a^3-1} = \frac{12a}{1-a^3}.
\end{aligned}$$

Výsledek: $\dfrac{12a}{1-a^3}$ pro $a \neq 1$.

6. Dělte

$$\frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2x - 2}.$$

**Řešení:** Dělíme-li mnohočlen $M(x)$ nenulovým mnohočlenem $N(x)$, jehož stupeň je nejvýše roven stupni polynomu $M(x)$, pak analogicky jako u čísel platí rovnost

$$\frac{M(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)},$$

kde $Q(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek po dělení; přitom zbytek je buď nulový polynom nebo jeho stupeň je menší než stupeň polynomu $N(x)$.

Nyní provedeme dělení; přitom předpokládáme, že platí $x^2+2x-2 \neq 0 \iff x \neq -1 \pm \sqrt{3}$, aby zlomek měl smysl:

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + 2x^4 + 0x^3 + \ x^2 - 5x + 1) : (x^2 + 2x - 2) = x^3 + 2x - 3 \\
\ \ x^5 + 2x^4 - 2x^3 \\
\ \ - \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 2x^3 + \ x^2 - 5x + 1 \\
\qquad\qquad 2x^3 + 4x^2 - 4x \\
\qquad\qquad - \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -3x^2 - \ x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad -3x^2 - 6x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad + \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 5x - 5
\end{array}
$$

Podíl je tedy $x^3 + 2x - 3$ a zbytek je $5x - 5$.

Výsledek: $x^3 + 2x - 3 + \dfrac{5x-5}{x^2+2x-2}$ pro $x \neq -1 \pm \sqrt{3}$.

## 4.8. Neřešené příklady.

- Upravte a uveďte podmínky, za nichž mají uvedené výrazy smysl:

1. $\left(\dfrac{3a^3b^2}{5x^2y^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2ax^2}{3b^2y}\right)^3 : \left(\dfrac{4a^4}{5b^2y^6}\right)^2$ $\left[\dfrac{a^4b^4}{10};\ abxy \neq 0\right]$

2. $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2a^2b^3}{3x^3y^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3x^2y}{5a^2b}\right)^3$ $\left[\dfrac{9b^3}{125a^2y};\ abxy \neq 0\right]$

3. $\left(\dfrac{2ax}{yz} \cdot \dfrac{3bx}{ay}\right) : \dfrac{9b^2z}{8a^2xy}$ $\left[\dfrac{16a^2x^3}{3byz^2};\ abyz \neq 0\right]$

4. $\left(\dfrac{a^2b}{c} : \dfrac{c}{b}\right) : \left(\dfrac{1}{ab} : \dfrac{c^2}{m}\right)$ $\left[\dfrac{a^3b^3}{m};\ abcm \neq 0\right]$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ $\left[\dfrac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}\right]$

6. $\dfrac{(10^{1/3} \cdot 8^{-1/2})^{-3}}{(5^{1/4} \cdot 4^{1/8})^2} : \dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}}$ $\left[\dfrac{4\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}{25}\right]$

7. $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ $\left[\dfrac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a - b};\ a, b \geq 0,\ a \neq b\right]$

8. $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \dfrac{3\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{3 + \sqrt{x}}{1 - x}$ $\left[\dfrac{4x - 2}{1 - x};\ 0 \leq x \neq 1\right]$

9. $\sqrt[5]{\left(\dfrac{\sqrt{a} \cdot a^{-2}}{a^{1/3}}\right)^{-2}}$ $\left[\sqrt[15]{a^{11}};\ a > 0\right]$

10. $(x^3+y^3)^{1/2}\cdot(x+y)^{1/2}\cdot\sqrt{(x^2+y^2-xy)^{-1}}$ $[x+y;\ x+y>0]$

11. $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}+1\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}+1\right)$ $[1;\ a\neq\pm b,\ a\neq 0]$

12. $\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right):\left(\dfrac{x^{-1}}{1+x^{-1}}-\dfrac{1-x^{-1}}{x^{-1}}\right)$ $\left[\dfrac{x^2}{2-x^2};\ x\notin\{0,1,\pm\sqrt{2}\}\right]$

13. $\dfrac{1}{a-b}\cdot\left(1+\dfrac{a}{a+b}\right)-\dfrac{1}{a+b}\cdot\left(1+\dfrac{b}{a-b}\right)$ $\left[\dfrac{1}{a-b};\ a\neq\pm b\right]$

14. $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3}{a^3-x^3}$ $[-1;\ 0\neq x\neq a]$

15. Je dán zlomek $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

a) Pro která reálná čísla $x$ má zlomek smysl? $[x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,-1,1\}]$

b) Pro která reálná čísla $x$ je hodnota zlomku rovna 0 ? $[x=2]$

c) Pro která reálná čísla $x$ nabývá zlomek kladných hodnot? $[x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)]$

• Upravte výrazy:

16. $A=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{(x^2+3x+2)\cdot|x-1|}$ $[A=-1 \text{ pro } 1>x\notin\{-2,-1\},\ A=1 \text{ pro } x>1]$

17. $B=\dfrac{(x^2-3x+2)|x+2|}{x^3-x^2-4x+4}$ $[B=-1 \text{ pro } x<-2,\ B=1 \text{ pro } -2<x\notin\{1,2\}]$

• Rozložte na součin:

18. $x^3+x^2-42x$ $[x(x-6)(x+7)]$

19. $x^4+2x^2-3$ $[(x^2+3)(x-1)(x+1)]$

20. $x^4-9x^3-10x^2$ $[x^2(x-10)(x+1)]$

21. $4x^2-8x+3$ $[(2x-3)(2x-1)]$

22. $3y^2+5y-2$ $[(3y-1)(y+2)]$

23. $2y^2+3y+1$ $[(y+1)(2y+1)]$

24. $6x^4-13x^2+6$ $[(3x^2-2)(2x^2-3)]$

25. $4a^2-3a-1$ $[(4a+1)(a-1)]$

26. $6a^2-7a-5$ $[(3a-5)(2a+1)]$

- Proveďte dělení:

27. $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$ $[2x - 5]$

28. $(9y^4 + 26y^2 + 25) : (3y^2 - 2y + 5)$ $[3y^2 + 2y + 5]$

29. $(3x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 28x - 32) : (3x - 4)$ $[x^3 + 5x^2 + 13x + 8]$

30. $(15 - 9x + 5x^2 - 3x^3) : (5 - 3x)$ $[x^2 + 3]$

31. $(x^5 - 13x^4 + 38x^3 + 32x^2 - 28x + 34) : (x^2 - 3x - 8)$ $\left[x^3 - 10x^2 + 16x + \dfrac{100x + 34}{x^2 - 3x - 8}\right]$