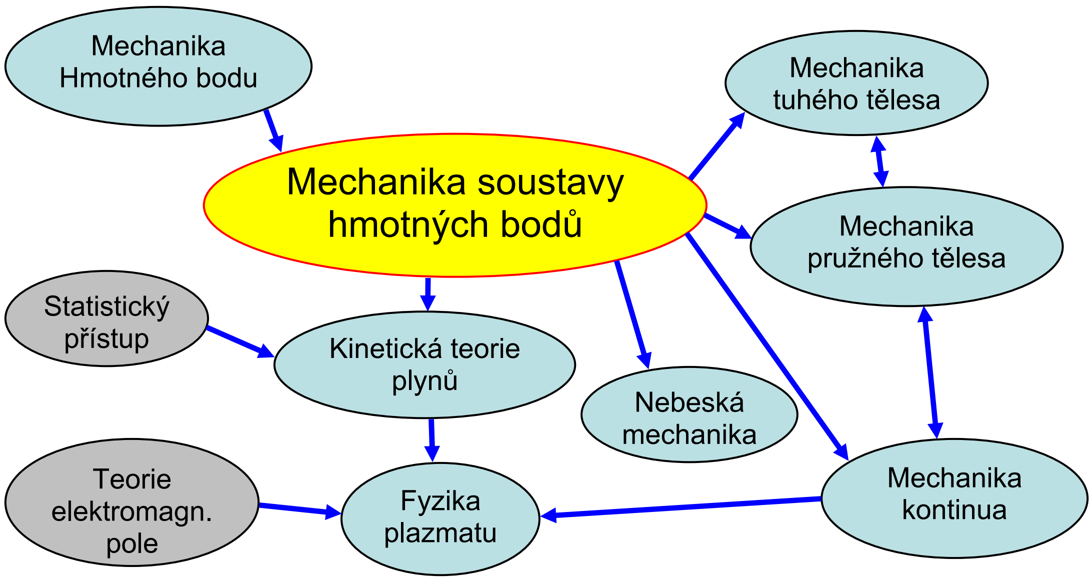
Mechanika soustavy hmotných bodů a tuhého tělesa

Učební text pro výuku předmětu Fyzika 1 pro KME, letní semestr školního roku 2010/11
Autor: Martin Žáček, katedra fyziky, Fakulta Elektrotechnická, ČVUT

Vymezení a souvislost se souvisejícími fyzikálními obory

Mechanika soustavy hmotných bodů se zabývá popisem pohybu množiny těles, u nichž lze zanedbat vlastní rozměry a na které působí (zcela obecné) síly. Tvoří obecnou teorii pro řadu speciálních oborů jako je například *nebeská mechanika*, v níž jsou síly mezi tělesy dány Newtonovým gravitačním zákonem, nebo *fyzikou plazmatu*, kde jsou síly mezi částicemi způsobené Lorenzovou silou z teorie elektromagnetického pole. Fyzika plazmatu a také *kinetická teorie plynů*, u níž se vyskytují speciální síly působící jen na malou vzdálenost, se však zabývají velkým množstvím částic a používají se u nich navíc přístupy ze statistické fyziky, kdy se neřeší pohybové rovnice jednotlivých částic ale odvozují se z nich pravděpodobnostní rozdělení mechanických veličin, jako jsou například energie částic nebo jejich rychlosti. Zvláštní případ soustavy je tzv. *tuhá soustava hmotných bodů*, kdy jsou délky myšlených spojnic bodů konstantní a tento případ má již blízko tuhému tělesu a některé vztahy jsou dokonce totožné a nerozlišují mezi spojitým a diskrétním rozložením hmoty. V případě, že připustíme proměnné vzdálenosti mezi tělesy, vede limitní přechod od diskrétního prostředí ke spojitému k *mechanice kontinua*, která popisuje pohyb spojitých prostředí jako jsou kapaliny nebo plyny. Tento popis se v některých případech používá i jako alternativa k částicovému popisu v již zmíněné fyzice plazmatu. *Mechanika pružného tělesa* je někde na pomezí mezi tuhým tělesem a mechanikou kontinua, kdy v nejjednodušší teorii předpokládáme lineární odezvu deformace tělesa na působící sílu, ve variantě délkových deformací známou jako tzv. Hookův zákon. Obecnější teorie pružnosti zavádějí různé modely odezvy těles na deformační síly, nazývané *reologické modely*.



Obrázek 1: Souvislost mechaniky soustavy hmotných bodů s příbuznými fyzikálními obory.

Hmotný střed, první věta impulsová

Řešme pohyb n hmotných bodů, i-té těleso nechť má hmotnost m_i, nachází se v poloze $\mathbf{r}_i$ a působí na něj síla $\mathbf{F}_i$. Každé těleso tedy bude splňovat druhý Newtonův pohybový zákon

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} . \tag{1}$$

Máme tedy n rovnic (1), pro každé těleso jednu rovnici. Sečtěme nyní všechny rovnice (1) pro všechna tělesa, obdržíme vztah

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} . \tag{2}$$

Předpokládejme, že všechny hmotnosti jsou konstantní, tj. že tělesa žádným mechanismem nezískávají ani neztrácejí hmotnost. Derivování proto můžeme napsat pro celý součin $m_i\mathbf{r}_i$, dokonce můžeme derivaci předsunout i před sumu, neboť derivace je lineární operace a konstantu lze napsat před derivaci (my ale provádíme opačný úkon) a součet derivací funkcí je derivace součtu funkcí, dostaneme tedy výraz

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i .$$

Z důvodů, které se ozřejmí později, upravme pravou stranu tak, že celý výraz vynásobíme a zároveň vydělíme sumou hmotností všech těles a obdržíme vztah

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{l=1}^{n} m_l \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{k=1}^{n} m_k} . \tag{3}$$

Sčítací index jsme pro přehlednost označili v každé sumě jinak. Označme nyní celkovou sílu působící na hmotné body jako

$$\mathbf{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \tag{4}$$

a zaveďme polohu *hmotného středu* $\mathbf{r}_S$ vzorcem

$$\boxed{\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{k=1}^{n} m_k}} . \tag{5}$$

Pak můžeme vzorec (3) napsat v kompaktnějším tvaru

$$\boxed{\mathbf{F}_\Sigma = m_\Sigma \frac{d^2\mathbf{r}_S}{dt^2}} , \tag{6}$$

který představuje *pohybovou rovnici pro soustavu hmotných bodů* a je formálně shodný s Newtonovým pohybovým zákonem (1) pro jediný hmotný bod. Vzorce (1) a (6) se však od sebe liší v tom, že $\mathbf{F}_\Sigma$ ve vzorci (6) je souhrnná síla působící na všechny hmotné body, m_Σ je jejich celková hmotnost a $\mathbf{r}_S$ je vektor hmotného středu soustavy. Hmotný střed soustavy nemusí být přitom totožný s žádným hmotným bodem, je to obecně pouze geometrický bod, získaný ze vzorce (5).

Souhrnný pohybový zákon pro soustavu hmotných bodů (6) se často vyjadřuje pomocí celkové hybnosti. Zaveďme proto nyní celkovou hybnost soustavy jako součet hybností jednotlivých hmotných bodů a vyjádřeme ji pomocí těžiště soustavy (5), dostaneme

$$\mathbf{p}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = m_\Sigma \frac{d}{dt}\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{m_\Sigma} = m_\Sigma \frac{d}{dt}\mathbf{r}_\mathrm{S} = m_\Sigma \mathbf{v}_\mathrm{S}\,. \qquad (7)$$

Celková hybnost je tedy rovna součinu celkové hmotnosti a rychlosti těžiště soustavy. Dosazením do pohybové rovnice (6) dostaneme pohybovou rovnici soustavy vyjádřenou pomocí celkové hybnosti soustavy, popř. po integrací integrální obdobu téhož

$$\boxed{\mathbf{F}_\Sigma = \frac{d\mathbf{p}_\Sigma}{dt}}\,, \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_\Sigma dt = \mathbf{p}_\Sigma(t_2) - \mathbf{p}_\Sigma(t_1)}\,. \qquad (8), (9)$$

Poslední dva vztahy se nazývají *první věta impulsová*. Podle jejího diferenciálního vyjádření (8) **je celková síla působící na soustavu hmotných bodů rovna časové změně celkové hybnosti** soustavy. Její integrální vyjádření (9) říká, že **časový integrál z celkové síly působící na soustavu je roven rozdílu celkové hybnosti soustavy na konci a na začátku časového intervalu, přes který je integrováno**.

Poznámka 1 *(vzorec pro těžiště soustavy hmotných bodů pro případ, kdy jedna hmotnost dominuje)*: Všimněte si, že vzorec (5) pro hmotný střed soustavy je vážený průměr, kde jako váhy vystupují hmotnosti jednotlivých těles. To je v souladu s naší intuicí, kdy očekáváme, že pohyb soustavy hmotných bodů budou určovat spíše hmotná tělesa a méně hmotné body budou pohyb soustavy jako celek ovlivňovat méně. Pokud budeme uvažovat jako soustavu hmotných bodů například sluneční soustavu, můžeme ji v prvním přiblížení nahradit jen Sluncem. Skutečně, bude-li za m_S hmotnost Slunce a m_i hmotnosti jednotlivých planet, v čitateli a ve jmenovateli ve vzorci (4) budou členy obsahující m_S výrazně dominovat oproti ostatním členům, které tak bude možné zanedbat. Dostaneme tedy polohu hmotného středu sluneční soustavy (pro jednoduchost uvažujme 4 planety):

$$\mathbf{r}_\mathrm{T} = \frac{m_\mathrm{S}\mathbf{r}_\mathrm{S} + m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + m_4\mathbf{r}_4}{m_\mathrm{S} + m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{\mathbf{r}_\mathrm{S} + \frac{m_1}{m_\mathrm{S}}\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_\mathrm{S}}\mathbf{r}_2 + \frac{m_3}{m_\mathrm{S}}\mathbf{r}_3 + \frac{m_4}{m_\mathrm{S}}\mathbf{r}_4}{1 + \frac{m_1}{m_\mathrm{S}} + \frac{m_2}{m_\mathrm{S}} + \frac{m_3}{m_\mathrm{S}} + \frac{m_4}{m_\mathrm{S}}} \approx \mathbf{r}_\mathrm{S}\,.$$

Těžiště Sluneční soustavy je tedy, jak bychom i intuitivně očekávali, přibližně ve středu Slunce. To i odpovídá skutečnosti, protože ve Slunci se nachází přibližně 99 % hmoty celé sluneční soustavy a to i se započítáním asteroidů, komet a ostatní meziplanetární hmoty.

Poznámka 2 *(vzorec pro těžiště soustavy hmotných bodů pro případ, kdy hmotnosti těles v soustavě jsou stejné)*: Pokud budou hmotnosti všech těles stejné, tj. $m_i = m$, lze je v čitateli a ve jmenovateli vytknout a vykrátit a dostaneme výsledný vzorec pro hmotný střed

$$\mathbf{r}_\mathrm{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{m\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i}{m\sum_{k=1}^{n} 1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i$$

jako aritmetický průměr všech polohových vektorů.

Druhá věta impulsová

Vynásobme nyní v rovnici (1) levou a pravou stranu vektorově polohovým vektorem $\mathbf{r}_i$,

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}$$

a sečtěme všechny rovnice pro všechny hmotné body v soustavě. m_i jako skalární veličinu můžeme předsunout před vektorový součin a dostaneme rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} \right).$$

Sumu na levé straně označíme jako celkový moment síly

$$\mathbf{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \tag{10}$$

a pravou stranu upravíme pomocí vztahu pro derivaci vektorového součinu z dodatku A

$$\mathbf{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i).$$

Poslední vektorový součin je moment hybnosti i-tého hmotného bodu vůči počátku a celkový moment hybnosti soustavy je součet všech jednotlivých momentů, tj.

$$\mathbf{b}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i \tag{11}$$

a dostaneme výsledný vztah mezi celkovým momentem síly a celkovým momentem hybnosti soustavy, který můžeme také integrovat,

$$\boxed{\mathbf{M}_\Sigma = \frac{d}{dt}\mathbf{b}_\Sigma}, \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_\Sigma dt = \mathbf{b}_\Sigma(t_2) - \mathbf{b}_\Sigma(t_1)}. \qquad (12), (13)$$

Jde o dvě různá vyjádření *druhé věty impulsové*. Její diferenciální vyjádření (12) říká, že **celkový moment síly působící na soustavu je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy**. Podle Integrální formulace (13) věty **je časový integrál z celkového momentu síly působící na soustavu roven rozdílu celkového momentu hybnosti soustavy v časech na konci a na začátku časového intervalu, přes který se integruje**.

Vnitřní a vnější síly

Pro účely pozdějšího přechodu od diskrétní soustavy konečného počtu hmotných bodů ke spojité soustavě nekonečně mnoha bodů představujících spojité těleso popřípadě pohybující se kontinuum, kdy některé, již odvozené vzorce pro soustavu bodů budou shodné nebo obdobné také pro těleso či kontinuum, je účelné odlišit vnější a vnitřní síly působící na soustavu. Proto vyjádříme sílu působící na i-tý hmotný bod jako součet vnější síly, která má příčinu mimo soustavu hmotných bodů (například gravitační působení těles, v jejichž blízkosti se soustava nachází) a vnitřní (často se říká vazbové) síly, která je zapříčiněna vzájemným působením bodů v soustavě a je dána součtem sil od všech ostatních bodů v soustavě (vnější síly budeme značit *Ext* jako externí a vnitřní síly *Int* jako interní)

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i} + \mathbf{F}_{\text{Int}\,i} = \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ki} \,,$$

kde jako $\mathbf{F}_{ki}$ jsme označili sílu, kterou působí k-tý hmotný bod na i-tý hmotný bod. Dosazením do vztahu (4) pro celkovou sílu působící na soustavu dostaneme

$$\mathbf{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i} \,, \tag{14}$$

neboť dvojitá suma ve výrazu pro vnitřní sílu je nulová. Platí totiž ze zákona akce a reakce $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ a v dvojité sumě se ve výrazu pro vnější sílu s v posledním vztahu jednotlivé síly po dvojicích vyruší. Výraz $\mathbf{F}_{ik}$ je totiž koeficient antisymetrické matice, což je matice, která transpozicí mění znaménko. Součet koeficientů antisymetrické matice je nulový, neboť součet koeficientů nad diagonálou se odečte od součtu koeficientů pod diagonálou (museli bychom ještě formálně dodefinovat $\mathbf{F}_{ik} = 0$, aby šlo skutečně o antisymetrickou matici ale přes diagonálu ve vzorci (14) stejně nesčítáme). Podle výsledku (14) je tedy **celková síla působící na soustavu je tedy dána jen vnějšími silami, vnitřní síly se vzájemně vyruší**.

Podobně vyjádříme moment síly působící na i-tý bod soustavy vzhledem k počátku

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{\text{Ext}\,i} + \mathbf{M}_{\text{Int}\,i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{Int}\,i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}\right),$$

a dosadíme ho do výrazu (10) pro celkový moment síly působící na soustavu, dostaneme

$$\mathbf{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}\right).$$

Koeficient ve dvojité sumě, představující silový moment, jímž působí vzhledem k počátku k-tý hmotný bod na i-tý bod, je také antisymetrická matice, jak nyní dokážeme. Není to na rozdíl od podobné matice ve výrazu (14) na první pohled vidět, protože zde navíc vystupuje ve vektorovém součinu rameno $\mathbf{r}_i$, jehož velikost i směr jsou zcela obecné. Antisymetričnost však dokážeme následující úpravou, kdy ve výrazu pro sumu všech vnitřních silových momentů seskupíme členy se symetrickými indexy, celkový výraz však musíme vynásobit jednou polovinou, jinak bychom sčítali každý koeficient matice dvakrát

$$\mathbf{M}_{\Sigma\,\text{Int}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki} - \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left[\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\right) \times \mathbf{F}_{ki}\right] = \mathbf{0}.$$

Využili jsme opět antisymetričnosti vzájemné síly $\mathbf{F}_{ik}$ v důsledku zákona akce a reakce a dostali jsme na konci vektorový součin rovnoběžných vektorů, který je ale nulový. Dostáváme tak výsledek

$$\mathbf{M}_\Sigma = \mathbf{M}_{\Sigma\,\text{Ext}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{\text{Ext}\,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{Ext}\,i}\right), \tag{15}$$

podle kterého **je celkový silový moment všech sil působících na soustavu dán pouze vnějšími silami, silové momenty od vzájemných sil uvnitř soustavy se vzájemně vyruší**.

Pojem tuhého tělesa

Zaveďme nejprve pojem *dokonale tuhá soustava hmotných bodů*. To je soustava, v níchž jsou velikosti vzájemných vektorů $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ neměnné, tj.

$$r_{ik} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i| = \text{konst.} \tag{16}$$

Takovou soustavu si můžeme představit jako tuhou konstrukci z kuliček spojených vzájemně tyčkami, kde ale hmotnosti spojovacích tyček zanedbáváme.

Hmotný střed (těžiště) tuhého tělesa

Tuhé těleso si představíme jako tuhou soustavu hmotných bodů, kdy ale bodů je v jistém smyslu hodně, jakoby vyplňovaly celý objem tělesa. Pak ale musíme ve vzorci pro hmotný střed soustavy hmotných bodů (5) nahradit sumaci integrováním a to tak, že integrujeme nekonečně mnoho nekonečně malých veličin tak, aby výsledek byl konečný. Matematický aparát disponuje symbolickým počtem, který s takovými intuitivními fyzikálními představami umí pracovat a nazývá se diferenciální a integrální počet. Diferenciální počet umí symbolicky pracovat s nekonečně malými veličinami (ale spíše jde o lineární teorii, jak porovnávat limitně nekonečně malé přírůstky funkcí) a integrální počet umožňuje takovéto přírůstky spojitě sčítat. Formální zavedení objemového integrálu se provádí v integrálním počtu funkcí více proměnných, kde se rovněž dokazují příslušné věty, za jakých podmínek například můžeme objemový integrál nahradit postupným integrováním přes jednotlivé proměnné, že nezáleží na pořadí integrování (Fubiniova věta) popřípadě jak přejít k jiné souřadnicové soustavě (věta o transformaci souřadnicové soustavy). Zde se spokojíme s intuitivní fyzikální představou. Za tím účelem nahradíme hmotnost m_i ve vzorci (17) hmotností objemového elementu dV, která je rovna $dm = \rho dV$, kde ρ je hustota tělesa v daném místě. Vzorec (17) pro spojitý případ bude mít formálně tvar

$$\boxed{\mathbf{r}_S = \frac{\iiint\limits_V \mathbf{r}\rho dV}{\iiint\limits_V \rho dV} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \mathbf{r}\rho dV}, \tag{17}$$

který můžete chápat jako součet nekonečně mnoha bodů (proto integrál místo sumy) vyplňujících objem tělesa. Objem je třídimenzionální, proto jsou tři integrační znaménka v integrálu ale často se všechny typy integrálů označují univerzálně jedním integračním znaménkem, zejména v odborné literatuře. Množina V, přes kterou se integruje, se vyznačuje pod integračním znaménkem. Volba integračních proměnných, ve kterých budeme integrál počítat a volba pořadí integrace závisí na symetrii tělesa, přes které se integruje.

Poznámka 1: Objemový (trojný) integrál je třídimenzionální varianta neorientovaného integrálu přes obecnou množinu z $\mathbb{R}^3$. Integrujeme-li například přes množinu z $\mathbb{R}$, jde o určitý integrál známý z integrálního počtu funkce jedné proměnné. Integrál přes $\mathbb{R}^2$ nazveme plošným (dvojným) integrálem, apod.

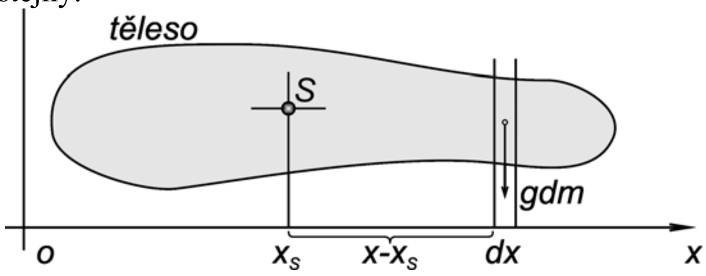
Poznámka 2: Neorientovaný integrál přes množinu $\Omega \in \mathbb{R}^n$ z jedničky je roven míře množiny Ω, fyzikálně jde o délku, resp. součet délek intervalů, celkovou plochu, objem množiny atd. Pokud má integrand význam hustoty (délkové, plošné, objemové, …), je integrál roven celkové hmotnost množiny (úsečky, plochy, objemu, …). To je i případ jmenovatele ve vzorci (17).

Poznámka 3: Vzorec (5) je vektorový, můžete se na něj dívat jako na úsporný zápis tří vzorců pro jednotlivé složky, v kartézských souřadnicích to budou například vztahy

$$x_S = \iiint\limits_V x\rho dV, \quad y_S = \iiint\limits_V y\rho dV, \quad z_S = \iiint\limits_V z\rho dV\,. \tag{18}$$

Odvození polohy hmotného středu z rovnosti momentů pro jednu souřadnici

Toto odvození demonstruje, jak lze odvodit vztah pro jednu souřadnici hmotného středu z rovnosti silových momentů na jedné a druhé straně od hmotného středu. Fyzikálně to odpovídá případu, kdy těleso podepřeme v jednom bodě pod těžištěm. Princip je stejný, jako když počítáme rovnováhu na páce, kdy se rovnají silové momenty vlevo a vpravo od podpěry. Zde však musíme sčítat infinitezimální silové momenty v celém tělese, tedy integrovat, neboť se jedná o spojitý případ ale princip je stejný.



Uvažujme těleso nacházející se v homogenním gravitačním poli, které je v rovnováze, podepřeme-li ho pod hmotným středem, jak je znázorněno na obrázku vlevo. S nechť je hmotný střed a x_S nechť je jeho x-ová souřadnice, kterou hledáme. Na délkový element tělesa (nacházející se mezi dvěma rovinami kolmými k ose x) o tloušťce dx bude působit tíha $d\mathbf{F} = g\, dm$, kde g je tíhové zrychlení a $dm = \tau_x(x)\, dx$ je hmotnost vyjádřená pomocí délkové hustoty τ_x. Délková hustota je hmotnost na jednotku délky tělesa, která závisí na souřadnici x, protože se může měnit jak průřez tělesa, tak jeho hustota. Silový moment působící na zmíněný element je pak prostý součin ramene a síly, neboť rameno a síla jsou kolmé, tj.

$$dM = \left(x - x_\mathrm{S}\right) dF = \left(x - x_\mathrm{S}\right) g\tau_x(x) dx\,.$$

Celkový silový moment, získaný integrací elementárního momentu přes celou délku tělesa je nulový, tj.

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - x_\mathrm{S}\right) g\tau_x(x) dx = 0\,.$$

Všimněte si, že poslední podmínka vyjadřuje totéž jako tvrzení, že součet silových momentů vlevo od hmotného středu se rovná součtu silových momentů vpravo, neboť rameno $x - x_\mathrm{S}$ mění znaménko a v integrálu se tak momenty pro souřadnice menší a větší než je souřadnice těžiště započítávají s opačnými znaménky. Také nevadí, že integrujeme přes celou osu x, neboť délková hustota nabývá nenulových hodnot na omezeném intervalu, tam, kde se nachází těleso, takže fakticky se integruje jen přes konečný interval. Integrand roznásobíme a integrál rozdělíme na dvě části, vytkneme konstanty a dostaneme

$$x_\mathrm{S} g \int_{-\infty}^{\infty} \tau_x(x) dx = g \int_{-\infty}^{\infty} x\tau_x(x) dx\,.$$

Integrál vlevo je roven celkové hmotnosti tělesa a po úpravě můžeme vyjádřit souřadnici hmotného středu jako

$$x_\mathrm{S} = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} x\tau_x(x) dx\,. \tag{19}$$

Vzorec (19) je shodný se vzorcem (17) resp. s jeho jednou komponentou (18), neboť délková hustota $\tau_x(x)$ je vlastně výsledek integrace přes zbylé souřadnice, kolmé k ose x, tj.

$$\tau_x(x) = \iint_S \rho dS = \iint_{(yz)} \rho dydz$$

a dosazením do (19) a přenesením x do vnitřního integrandu dostaneme první variantu vzorce (18) pro jednu souřadnici hmotného středu, vyjádřenou pomocí objemového integrálu.

Pohybová rovnice pro těleso otáčející se kolem pevné osy

Předpokládejme těleso, které se otáčí kolem pevné osy. Odpovídalo by to například setrvačníku uchyceného v pevných ložiskách. Pro odvození pohybové rovnice nejprve nahraďme těleso dokonale tuhou soustavou hmotných bodů a napišme pohybovou rovnici pro jeden jediný bod o hmotnosti m nacházejícím se ve vzdálenosti R od osy otáčení. Nechť na bod působí síla $\mathbf{F}$. Pohybovou rovnici podle 2. Newtonova zákona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ vynásobme zleva vektorově průvodičem $\mathbf{R}$, což je vektor mířící kolmo od osy otáčení k vyšetřovanému bodu a dostaneme

$$\mathbf{R}\times\mathbf{F} = m\mathbf{R}\times\mathbf{a}\,. \tag{20}$$

Levá strana je silový moment vzhledem k ose otáčení $\mathbf{M} = \mathbf{R}\times\mathbf{F} = \mathbf{R}\times\mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{R}\times\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{R}\times\mathbf{F}_{\perp}$ (způsobený jen kolmou složkou síly k průvodiči). Na pravé straně rovnice (20) rozepíšeme zrychlení na součet tečné a normálové složky $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\tau} + \mathbf{a}_{\mathrm{n}}$ a pravou stranu (20) upravíme (trajektorie je zde kružnice s poloměrem R a tedy tečná složka zrychlení je kolmá k průvodiči, normálová složka zrychlení je s průvodičem rovnoběžná)

$$\mathbf{R}\times\mathbf{a} = \mathbf{R}\times\mathbf{a}_{\tau} + \mathbf{R}\times\mathbf{a}_{\mathrm{n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{R}\parallel\mathbf{a}_{\mathrm{n}}}}{=} \mathbf{R}\times\mathbf{a}_{\tau} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dodatek A2}}}{=} \mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{v}\right) - \frac{d\mathbf{R}}{dt}\times\mathbf{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt}\prec\boldsymbol{\tau}\parallel\mathbf{v}}}{=} \frac{d}{dt}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{v}\right),$$

za rychlost $\mathbf{v}$ dosadíme vzorec pro obvodovou rychlost $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$ a upravíme dvojitý vektorový součin podle vztahu v dodatku B

$$\mathbf{R}\times\mathbf{v} = \mathbf{R}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dodatek B}}}{=} \boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\right) - \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{R}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{R}}}{=} \boldsymbol{\omega}R^2\,.$$

Dosazením všech obdržených výsledků zpět do rovnice (20) obdržíme

$$\mathbf{M} = mR^2\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\,. \tag{21}$$

Výsledná pohybová rovnice (21) pro rotační pohyb hmotného bodu má formálně podobný tvar jako pohybová rovnice pro hmotný bod zapsaná jako

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,. \tag{22}$$

Vlevo v obou rovnicích (21) a (22) je totiž veličina charakterizující silové působení na hmotný bod a obě časové derivace na pravých stranách mají význam nějakého druhu zrychlení: v rovnici (22) jde o známý vektor zrychlení jako derivace vektoru rychlosti, v rovnici (21) jde o vektor úhlového zrychlení definovaný jako časová derivace vektoru úhlové rychlosti. Protože v rovnici (22) vystupuje mezi sílou a zrychlením jako koeficient úměrnosti hmotnost m ve významu míry setrvačnosti, dostaneme porovnáním vztahů (21) a (22) fyzikální význam kombinace veličin mR^2 jako *míru setrvačnosti* vzhledem k otáčení. Aby analogie vzorců (21) a (22) ještě lépe vynikla, vyplatí se tento součin hmotnosti a kvadrátu vzdálenosti od osy otáčení definovat jako novou veličinu, *moment setrvačnosti* hmotného bodu nacházejícího se ve vzdálenosti R vůči ose otáčení, vztahem

$$J = mR^2\,. \tag{23}$$

Protože odvození pro kterýkoliv hmotný bod z dokonale tuhé otáčející se soustavy je stejné, dostaneme n stejných rovnic (21) pro n hmotných bodů a po jejich sečtení dostaneme

$$\mathbf{M}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{24}$$

a definujeme *moment setrvačnosti pro dokonale tuhou soustavu* otáčející se kolem pevné osy

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2}. \tag{25}$$

Pro tuhé těleso musíme nahradit sumu objemovým integrálem a hmotnosti jednotlivých bodů součinem hustoty a objemového elementu stejně jako jsme to provedli u vztahu (17) pro hmotný střed a dostaneme podobný vzorec jako je (5) pro *moment setrvačnosti tuhého tělesa*

$$\boxed{J = \iiint_V R^2 \rho dV}. \tag{26}$$

Definujme časovou derivaci vektoru úhlové rychlosti z rovnice (24) jako vektor úhlového zrychlení

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \tag{27}$$

známým již z mechaniky (jediného) hmotného bodu. Jeho použitím spolu s některým ze vztahů (23), (25) nebo (26) dostaneme kompaktnější zápis pohybové rovnice (21) pro tuhou soustavu hmotných bodů resp. její varianty s integrálem místo sumy v případě tuhého tělesa, **rovnici pro otáčivý pohyb kolem pevné osy**

$$\boxed{\mathbf{M} = J\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{28}$$

kde **M** je celkový moment vnějších sil působících na těleso vzhledem k ose otáčení. Vnitřní momenty sil se totiž podle vztahu (15) vyruší, jak jsme již dříve dokázali.

Poznámka: Čtenář, který se nad posledním odvození pohybové rovnice otáčení tělesa kolem pevné osy zamyslí, si možná uvědomí, že zde vlastně vůbec nebylo třeba používat vektory, když osa je pevná a směry veličin jako **M**, **ω**, **ε** apod. jsou konstantní. To je pravda. Použili jsme však přesto vektorové odvození, abychom výslednou rovnici (28) dostali jako vektorovou a mohli bez důkazu konstatovat, že platí v tomto vektorovém tvaru i pro obecnější otáčivý pohyb, kdy se může měnit směr osy otáčení. V tomto případě má také vektor úhlového zrychlení **ε** jiný směr než vektor úhlové rychlosti **ω**, jak je zřejmé ze vztahu (27). Při odvození se využívá složitější matematický aparát, který přesahuje rámec základního kurzu fyziky na FEL. Ani vzorce pro moment setrvačnosti definované vztahy (25) resp. (26) pro pohyb kolem proměnné osy již neplatí. Moment setrvačnosti totiž závisí na volbě osy otáčení a nelze jej vyjádřit jediným číslem. Vyjadřuje se *tenzorem druhého řádu*, což je matice s jistými transformačními vlastnostmi při přechodu od jedné souřadnicové soustavy k jiné. Na FEL nejsou tenzory v základních matematických kurzech zařazeny, nejde však o nic složitého. Vztah tenzoru druhého řádu k matici je podobný jako vztah geometrického vektoru, kterému můžeme přiřadit velikost a směr, k obecné trojici nějakých čísel, bez určeného vztahu mezi nimi. Skutečně má tenzor také jisté geometrické vlastnosti.

Označíme-li směrový vektor osy otáčení **v**, tj. pro složky vektoru **ω** platí $\omega_i = \omega v_i$, *kde* $i = x, y, z$ resp. 1, 2, 3, můžeme moment otáčení kolem konkrétní osy vyjádřit vztahem

$$J = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} J_{ij} v_i v_j$$

kde J_{ij} jsou koeficienty *tenzoru setrvačnosti*. V tomto tenzoru jsou obsaženy veškeré setrvačné vlastnosti tělesa co do otáčení kolem libovolné osy. Důležitý je pak tenzorový vztah mezi momentem hybnosti a úhlovou rychlostí, který lze zapsat ve složkách jako

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} J_{ij}\omega_j,$$

podle kterého mohou mít vektory **b** a **ω** rovněž různé směry. V posledním vztahu jistě poznáte součin matice s vektorem zapsaným sloupcově. Je-li tato matice tenzor, říkáme takovému součinu *tenzorový součin*.

Dodatek A

Derivaci vektorového součinu dvou vektorových polí $\mathbf{A}(x)$ a $\mathbf{B}(x)$ provedeme podobně, jako se derivuje součin funkci

$$\frac{d}{dx}\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)=\frac{d\mathbf{A}}{dx}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dx} \tag{1}$$

jak se lze snadno přesvědčit, například rozepsáním do složek v ortogonální souřadnicové soustavě a derivováním po složkách.

Pro dvojitý vektorový součin platí často používaná identita

$$\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)-\mathbf{c}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right). \tag{2}$$

Otázky ke zkoušce k soustavě hmotných bodů

(*tento seznam zatím není oficiální, berte ho jako první návrh, který může být případně modifikován*)

1. Popište, čím se zabývá mechanika soustavy hmotných bodů.
2. Formulujte první větu impulsovou v diferenciálním vyjádření a vysvětlete slovně její význam.
3. Formulujte první větu impulsovou v integrálním vyjádření a vysvětlete slovně její význam.
4. Napište vztah pro hmotný střed soustavy hmotných bodů.
5. Jak je definována celková hybnost soustavy hmotných bodů a jak souvisí s hmotným středem soustavy?
6. Formulujte druhou větu impulsovou v diferenciálním vyjádření a vysvětlete slovně její význam.
7. Formulujte druhou větu impulsovou v integrálním vyjádření a vysvětlete slovně její význam.
8. Vyjádřete celkovou sílu působící na soustavu hmotných bodů pomocí vnějších a vnitřních sil.
9. Vyjádřete celkový moment síly vzhledem k počátku souřadnicové soustavy působící na soustavu hmotných bodů pomocí vnějších a vnitřních sil.

Seznam symbolů

Seznam symbolů se bude postupně dopisovat, zatím jsou zde symboly z prvního odstavce.

Matematické symboly

$x \prec z$	x je úměrné z
$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$	vektor **a** je rovnoběžný s vektorem **b**
$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$	vektor **a** je kolmý na vektor **b**
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalární součin vektorů **a**, **b**
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	vektorový součin vektorů **a**, **b**

Fyzikální veličiny

$\mathbf{F}_i$	vektor síly působící na i-tý hmotný bod
$\mathbf{F}_\Sigma$	celková síla působící na soustavu hmotných bodů
m_i	hmotnost i-tého hmotného bodu
m_Σ	celková hmotnost soustavy hmotných bodů
$\mathbf{p}_i$	vektor hybnosti i-tého hmotného bodu
$\mathbf{p}_\Sigma$	celková hybnost soustavy hmotných bodů
$\mathbf{r}_i$	polohový vektor i-tého hmotného bodu
$\mathbf{r}_\mathrm{S}$	polohový vektor hmotného středu
t	čas