

# Doplňková matematika

*Učební materiály k semináři Doplnková matematika.*

## **Autoři:**

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

## **Úvod:**

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

## Matematický seminář: Pracovní list # 9

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny. Zaměřte se hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

1. Určete definiční obor funkce  $f(x) = \sqrt[x]{\ln(x)}$ .

2. Vypočítejte limitu  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[x]{e^x + 1})$ .

3. Určete asymptoty funkce  $f(x) = e^{-1/x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x)$ .

4. Najděte derivaci funkce  $f(x) = e^{|x-2|} - |x-2|$ .

5. Pro funkci  $f(x) = \int_{13}^x e^{t^4 - 8t^2} dt$  určete intervaly konvexity a inflexní body.

6. Pro funkci  $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$  sestavte Taylorův polynom stupně 3 s vhodným středem. Použijte jej k odhadu hodnoty  $4 \cdot f(1)$ . Kolik je vlastně  $4 \cdot f(1)$ ? Co bychom asi dostali při použití polynomu  $T_n$ ?

7. Vypočítejte integrál  $\int_0^{5\pi} (x + 5) \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx$ .

8. Vypočítejte integrál  $\int \frac{\sin^2(x) + 4 \sin(x) + 4}{\sin^2(x)(\sin^2(x) + 4)} \cos(x) dx$ .

9. Vypočítejte integrál  $\int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1 - \sinh^2(x)}} dx$ . Nemusíte určovat obor platnosti.

10. Vypočítejte integrál  $\int_1^{\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2} dx$ .

11. Číslo  $z = \frac{3-i}{1+i - \frac{2i}{3+i}}$  převedte nejprve na základní algebraický tvar a pak na exponenciální tvar.

12. Vyřešte soustavu lineárních rovnic danou maticí s parametrem

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & a^2 \end{array} \right).$$

13. Uvažujme množinu  $V$  všech funkcí definovaných a diferencovatelných na  $\mathbb{R}$  a množinu  $W$  všech funkcí definovaných na  $\mathbb{R}$ .

Dokažte, že s běžnými operacemi  $f + g$  a  $c \cdot f$  jde o vektorové (lineární) prostory. Nápoděda: Ukažte, že jsou to podprostory vektorového prostoru všech reálných funkcí s běžnými operacemi.

Dokažte, že zobrazení  $L : V \mapsto W$  dané předpisem  $L(f) = f'$  je lineární a určete jeho jádro  $\operatorname{Ker}(L)$ .

# Matematický seminář: Pracovní list # 9 řešení

1. Převod obecné (od)mocniny:  $f(x) = (\ln(x))^{1/x} = e^{\frac{\ln(\ln(x))}{x}}$ .  $D(f) = (1, \infty)$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[x]{e^x + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\ln(e^x + 1)}{x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right)}$ .

Situace  $\frac{\infty}{\infty}$ , krok stranou:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\text{PH}}{\frac{\infty}{\infty}}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) = 1.$$

L'Hospital by taky šel. Návrat zpět:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[x]{e^x + 1}) = e^1 = e$ .

3.  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \stackrel{e^0 + \dots}{=} 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 2$ . Závěr: Vodorovná asymptota  $y = 2$  v  $\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)) \stackrel{e^{-\infty} + 0}{=} 0 + 0 = 0$ . Zatím nic.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)) \stackrel{e^{\infty} + 0}{=} \infty$ . Svislá asymptota v  $x = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \stackrel{e^0 + \dots}{=} 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$ . Závěr: Vodorovná asymptota  $y = 0$  v  $-\infty$ .

4.  $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} - (x-2), & x \geq 2; \\ e^{-(x-2)} + (x-2), & x < 2 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & x > 2; \\ -e^{-(x-2)} + 1, & x < 2. \end{cases}$

Derivace ve dvojce:

$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (f'(x)) \stackrel{x > 2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} (e^{x-2} - 1) = 0;$

$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (f'(x)) \stackrel{x < 2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-e^{x-2} + 1) = 0.$

Závěr:  $f'(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & x > 2; \\ 0, & x = 2; \\ -e^{-(x-2)} + 1, & x < 2. \end{cases}$

5. Potřebujeme  $f''(x)$ . Fundamentální věta kalkulu:  $\left[ \int_a^x g(t) dt \right]' = g(x)$ . Proto

$f'(x) = e^{x^4-8x^2}$  a  $f''(x) = (4x^3 - 16x)e^{x^4-8x^2} = 4x(x-2)(x+2)e^{x^4-8x^2}$ .

Dělicí body:  $-2, 0, 2$ .

	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, 0 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 2, \infty \rangle$
$x :$	-	-	+	+
$x - 2 :$	-	-	-	+
$x + 2 :$	-	+	+	+
$e^{x^4-8x^2} :$	+	+	+	+
$f'(x) :$	-	+	-	+
$f(x) :$	∩	∪	∩	∪

$f$  je konvexní na  $\langle -2, 0 \rangle$  a na  $\langle 2, \infty \rangle$ .  $f$  je konkávní na  $(-\infty, -2)$  a na  $\langle 0, 2 \rangle$ .  
Inflexní body v  $x = -2, 0, 2$ .

6. Do arkustangensu nejraději dosazujeme nulu, tedy  $a = 0$ .

Obecně pak  $T_3(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)(x - 0)^3$ .

$$\begin{array}{l} f(x) = \arctg(x) \\ f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \\ f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \\ f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \end{array} \left| \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = -2 \end{array} \right. \quad T_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Proto  $4 \cdot f(1) \sim 4T_3(1) = 4(1 - \frac{1}{3})$ . Přesně  $4f(1) = \pi$ .

Vyšší stupeň polynomu dá  $\pi \sim 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots)$

$$\begin{aligned} 7. \int_0^{5\pi} (x+5) \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx &= \left| \begin{array}{l} f = x+5 \\ f' = 1 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g' = \sin\left(\frac{x}{5}\right) \\ g = -5 \cos\left(\frac{x}{5}\right) \end{array} \right| \\ &= \left[ -5(x+5) \cos\left(\frac{x}{5}\right) \right]_0^{5\pi} - \int_0^{5\pi} -5 \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = 5(5\pi+5) + 25 + \left[ 25 \sin\left(\frac{x}{5}\right) \right]_0^{5\pi} \\ &= 25\pi + 50 + 0 - 0 = 25\pi + 50. \end{aligned}$$

$$8. \int \frac{\sin^2(x) + 4 \sin(x) + 4}{\sin^2(x)(\sin^2(x) + 4)} \cos(x) dx = \left| \begin{array}{l} y = \sin(x) \\ dy = \cos(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{y^2 + 4y + 4}{y^2(y^2 + 4)} dy.$$

$$\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2(y^2 + 4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{Cy + D}{y^2 + 4}, \quad B = \frac{y^2 + 4y + 4}{y^2(y^2 + 4)} \Big|_{y=0} = 1.$$

$y^2 + 4y + 4 = Ay(y^2 + 4) + 1 \cdot (y^2 + 4) + (Cy + D)y^2$ , odtud

$y^2 + 4y + 4 = (A + C)y^3 + (D + 1)y^2 + 4Ay + 4$ . Proto  $A = 1, C = -1, D = 0$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2 + 4y + 4}{y^2(y^2 + 4)} dy &= \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{y}{y^2 + 4} dy = \left| \begin{array}{l} z = y^2 + 4 \\ dz = 2y dy \end{array} \right| \\ &= \ln|y| + \int y^{-2} dy - \int \frac{\frac{1}{2} dz}{z} = \ln|y| - y^{-1} - \frac{1}{2} \ln|z| + C \\ &= \ln|\sin(x)| - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{2} \ln(\sin^2(x) + 4) + C, \quad x \neq k\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1 - \sinh^2(x)}} dx &= \left| \begin{array}{l} y = \sinh(x) \\ dy = \cosh(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin(y) + C \\ &= \arcsin(\sinh(x)) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \text{Nejprve neurčitý: } \int \ln(2x) \frac{1}{x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} f = \ln(2x) \\ f' = \frac{1}{2x} \cdot 2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g' = x^{-2} \\ g = -x^{-1} \end{array} \right| \\ &= \ln(2x) \frac{-1}{x} - \int -x^{-2} dx = \ln(2x) \frac{-1}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln(2x) + 1}{x} + C, \quad x > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Proto } \int_1^{\infty} \ln(2x) \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln(2x) + 1}{x} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(2x) + 1}{x} \right) + \ln(2) + 1$$

$$\stackrel{\infty}{\text{IH}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{2}{2x} \right) + \ln(2) + 1 = 0 + \ln(2) + 1 = \ln(2) + 1.$$

$$11. z = \frac{(3-i)(3+i)}{(1+i)(3+i) - 2i} = \frac{10}{2+2i} = \frac{10(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{5}{2}(1-i) = \frac{5\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

$$12. \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & a^2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{array} \right).$$

Poslední řádek dává rovnici  $0 = a^2 - 1$ . Pro  $a \neq \pm 1$  tedy řešení neexistuje.

Dále předpokládejme  $a = \pm 1$ , máme 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right).$$

Čtvrtý řádek rozhodne o tom, zda je hodnost matice rovna 4 nebo méně.

Pokud  $a = -1$ , tak vyjde matice 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$
 s hodností 4, což je rovno

počtu neznámých a bude proto jediné řešení.

$$x_1 + 2x_4 = 1$$

$$x_2 + x_4 = -1$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

$$-2x_4 = 0$$

$$\implies x_4 = 0, x_3 = 1, x_2 = -1, x_1 = 1.$$

Zbývá případ  $a = 1$ , matice 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
 má hodnost tři, bude tedy řešení

s jedním parametrem, dle tvaru matice pro poslední proměnnou.

$$x_1 + 2x_4 = 1$$

$$x_2 - x_4 = -1 \implies x_4 = t, x_3 = 1 - t, x_2 = t - 1, x_1 = 1 - 2t.$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

Vychází řešení  $(1 - 2t, t - 1, 1 - t, t)$  neboli  $(1, -1, 1, 0) + t(-2, 1, -1, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**13.** a) Nechť  $f, g \in W$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dle definice  $W$  jsou funkce  $f, g$  definované na  $\mathbb{R}$ , proto je i funkce  $\alpha f + g$  definovaná na  $\mathbb{R}$ , jinými slovy  $(\alpha f + g) \in W$ . Množina  $W$  je tedy lineárním podprostorem vektorového prostoru, proto je  $W$  vektorový prostor.

b) Nechť  $f, g \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dle definice  $V$  jsou funkce  $f, g$  definované a diferencovatelné na  $\mathbb{R}$ , podle vět z analýzy je tedy i funkce  $\alpha f + g$  definovaná a diferencovatelná na  $\mathbb{R}$ , jinými slovy  $(\alpha f + g) \in V$ . Množina  $V$  je tedy lineárním podprostorem vektorového prostoru, proto je  $V$  vektorový prostor.

c) Nechť  $f, g \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak

$$L(\alpha f + g) = [\alpha f + g]' = \alpha f' + g' = \alpha L(f) + L(g).$$

Zobrazení  $L$  je tedy lineární.

Jádro:  $\text{Ker}(L) = \{f \in W; L(f) = 0\} = \{f \in W; f' = 0\}$ . Zde „0“ značí nulu v prostoru  $W$ , tedy nulovou funkci. Podle vět z analýzy jsou to přesně konstantní funkce, které mají derivaci identicky rovnou nule. Proto

$$\text{Ker}(L) = \{f \in W; \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c\} = \{c; c \in \mathbb{R}\}.$$

# Dotazy od studentů

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on-line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na [zacekm@fel.cvut.cz](mailto:zacekm@fel.cvut.cz), odpověď může být přidána.

## Příklad 2

2. Vypočítejte limitu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{e^x + 1}$ .

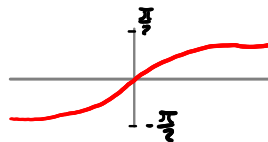
Alternativní postup:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{e^x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} [e^x (1 + e^{-x})]^{\frac{1}{x}} = e \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{-x})^{\frac{1}{x}} = \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

**Mohu poprosit o vyřešení 3ky, stále se nějak motám v asymptotách... Děkuji**

3. Určete asymptoty funkce  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$ .

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$$



Vodorovné asymptoty:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right) = 2$$

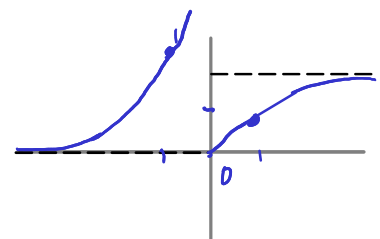
$$\begin{array}{cc} \rightarrow 1 & \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{array}{cc} \rightarrow 1 & \rightarrow -1 \end{array} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$$

$$\begin{array}{cc} \rightarrow 0 & \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \begin{array}{cc} \rightarrow \infty & \rightarrow 0 \end{array} \right)$$



dvě vodorovné asymptoty, 0 a 2, jednu svislou v bodě 0.

$$f(-1) = e^{-\frac{1}{-1}} = e = 2.2$$

$$f(1) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \doteq 0.9$$

**Kdyby v 5 byly meze integrálu prohozené, platí, že to, co bylo konkávní, je konvexní, ...?**

Ano, platí.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = + \frac{dF}{dx} = + f(x)$$
$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(x) dx = - \frac{dF}{dx} = - f(x)$$

A všechny vyšší derivace se také budou lišit znaménkem.

## Vyřešil byste prosím Taylorův polynom ze cvičení 6?

6. Pro funkci  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  sestavte Taylorův polynom stupně 3 s vhodným středem. Použijte jej k odhadu hodnoty  $4f(1)$ . Kolik je vlastně  $4f(1)$ ?

Co bychom asi dostali při použití polynomu  $T_n$  ?

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2) + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = f'''(0) = -2$$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 = x - \frac{x^3}{3}$$

$$f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

**Poznámka:** Šlo jen o výpočet třetí derivace. V původním textu byla v řešení chyba, v tomto dokumentu je již opravena.



Mohl bych poprosit, pokud to tam už není o vysvětlení prvního kroku v řešení 11? (že  $(3-j)*(3+j)=4$ )

11. Číslo

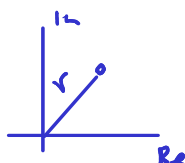
$$z = \frac{3 - i}{1 + i - \frac{2i}{3+i}}$$

převeďte nejprve na základní algebraický tvar a pak na exponenciální tvar.

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$$

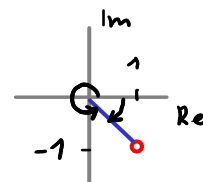
$$z = x + jy$$



Máte pravdu, v čitateli má být 10.

$$\frac{10}{2+2j} = \frac{10(2-2j)}{4+4} = \frac{20-20j}{8} = \frac{5}{2}(1-j) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \angle j\frac{7}{4}\pi$$

$$(2+2j)(2-2j) = 4 - (2j)^2 = 4+4=8$$



**Poznámka:** V původním textu byla v řešení chyba, v tomto dokumentu je již opravena. Dotaz spočíval na objasnění jiného výsledku, než vyšel studentovi.