# Doplňková matematika

*Učební materiály k semináři Doplňková matematika.*

**Autoři:**

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*


**Úvod:**

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

# Matematický seminář: Pracovní list # 8

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny. Zaměřte se hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

**1.** Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x-1}$ a pak najděte limity v krajních bodech intervalů $D(f)$.

**2.** Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x\sin(2\pi x)}{x-1}\right)$.

**3.** Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} \ln(3-x), & x < 3; \\ \dfrac{\ln(x-2)}{\cos(\pi x)}, & x \geq 3. \end{cases}$

**4.** Najděte derivaci funkce $f(x) = \ln\big(5 + |2x-4|\big)$.

**5.** Pro funkci $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - 4x, & x < 0; \\ \sqrt[5]{x^2 - 4x + 5}, & x \geq 0 \end{cases}$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

**6.** Najděte tečnu (tečny) ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 1$, která je kolmá (které jsou kolmé) na přímku $p$: $x + 12y = 1$.

**7.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x}\,dx$.

**8.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_1^e (18x^2 + 2x)\ln(x)\,dx$.

**9.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$.

**10.** Uvažujte racionální lomenou funkci $\dfrac{8x^2 + 8x + 64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)}$.
Napište, jak vypadá obecně její rozklad na parciální zlomky, a pak určete ty konstanty, které lze získat pomocí zakrývací metody.

**11.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_3^\infty \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx$.

**12.** Uvažujte vektorový prostor $V = \{(x, -x, y, 0, 2x);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ a v něm vektory $\vec{u} = (1, -1, 2, 0, 2)$, $\vec{v} = (2, -2, 1, 0, 4)$.
Dokažte, že $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ je báze prostoru $V$.

**13.** Dokázali jsme, že $B = (\vec{u}, \vec{v})$ je báze prostoru $V$. Uvažujte v něm vektory $\vec{a} = (3, -3, 0, 0, 6)$ a $\vec{b} = (3, -3, 3, 0, 6)$.
a) Spočítejte $\vec{a} + \vec{b}$.
b) Najděte souřadnice $[\vec{a}]_B$ a $[\vec{b}]_B$ vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ vzhledem k bázi $B$.
c) Sečtěte souřadnice $[\vec{a}]_B$ a $[\vec{b}]_B$ (jako vektory). Který vektor z $V$ má souřadnice $[\vec{a}]_B + [\vec{b}]_B$? Jaké poučení z toho plyne?

# Matematický seminář: Pracovní list # 8 řešení

**1.** $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(f) \overset{\frac{e^0}{\infty}}{=\!=} 0$; $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}(f) \overset{\frac{e^\infty}{-1}}{=\!=} -\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to 1^+}(f) \overset{\frac{e}{0^+}}{=\!=} \infty$;

$\lim\limits_{x\to -\infty}(f) \overset{\frac{e^0}{-\infty}}{=\!=} 0$; $\quad \lim\limits_{x\to 0^-}(f) \overset{\frac{e^{-\infty}}{-1}}{=\!=} \frac{0}{-1} = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to 1^-}(f) \overset{\frac{e}{0^-}}{=\!=} -\infty$.

**2.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x\sin(2\pi x)}{x-1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)}{1}\right) = 2\pi$.

**3.** Zjevně spojitá na $(-\infty, 3)$ a na $(3,\infty)$.

$f(3) = \frac{\ln(1)}{\cos(3\pi)} = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to 3^+}(f) \overset{x>3}{=\!=} \lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{\ln(x-2)}{\cos(\pi x)}\right) = 0$;

$\lim\limits_{x\to 3^-}(f) \overset{x<3}{=\!=} \lim\limits_{x\to 3^-}\big(\ln(3-x)\big) \overset{\ln(0^+)}{=\!=} -\infty$.

Závěr: $f$ má v bodě $x=3$ podstatnou nespojitost. Je tam spojitá zprava.

**4.** $f(x) = \begin{cases} \ln(5+(2x-4)), & 2x-4>2; \\ \ln(5-(2x-4)), & 2x-4 \le 2 \end{cases} = \begin{cases} \ln(2x+1), & x>2; \\ \ln(9-2x), & x\le 2. \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+1}, & x>2; \\ \frac{-2}{9-2x}, & x<2. \end{cases}$

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+}(f') \overset{x>2}{=\!=} \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{2}{2x+1}\right) = \frac{2}{5}$;

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-}(f') \overset{x<2}{=\!=} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{-2}{9-2x}\right) = -\frac{2}{5}$.

Závěr: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+1}, & x>2; \\ \text{neex.}, & x=2; \\ \frac{-2}{9-2x}, & x<2. \end{cases}$

**5.** $D(f) = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} -2x-4, & x<0; \\ \frac{1}{5}(x^2-4x+5)^{-4/5}\cdot(2x-4), & x>0. \end{cases}$

$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} -2x-4=0, & x<0; \\ 2x-4=0, & x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2, & x<0; \\ x=2, & x>0. \end{cases}$

$f'$ neexistuje v $D(f)$? Patrně $f = 0$, dále vzhledem k $\frac{1}{(x^2-4x+5)^{4/5}}$ nutno prozkoumat $x^2-4x+5=0$, to nenastane.

Dělící body: $x = -2, 0, 2$.

| | $(-\infty,-2\rangle$ | $\langle -2, 0\rangle$ | $\langle 0, 2\rangle$ | $\langle 2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2x-4$ : | $+$ | $-$ | ///// | ///// |
| $2x-4$ : | ///// | ///// | $-$ | $+$ |
| $(x^2-4x+5)^{-4/5}$ : | ///// | ///// | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ : | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ : | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Protože $f$ není spojitá v 0, sousední intervaly shodné monotonie nelze spojit bez dalšího zkoumání. Porovnáme, zda v místě spoje funkce skáče dolů či nahoru: $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\left((x^2-4x+5)^{1/5}\right) = 5^{1/5}$, $f(0^-) = \lim_{x\to 0^-}(1-x^2-4x) = 1$, tedy $f(0^-) < f(0^+)$. Vidíme následující průběh, když přecházíme přes $x=0$ zleva doprava: Nejprve funkce klesá, pak poskočí nahoru a zase klesá. Tyto dva sousedící intervaly monotonie proto nelze spojit.

Závěr: $f$ je rostoucí na $(-\infty,-2\rangle$ a na $\langle 2,\infty)$. $f$ je klesající na $\langle -2,0)$ a na $(0,2\rangle$. $f$ má lokální maximum $f(-2)=5$ a lokální minimum $f(2)=1$.

**6.** Nevíme kde, takže hledáme tečnu v obecném bodě $a$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ neboli $y-a^3-1=3a^2(x-a)$.

Daná přímka má zase rovnici $y=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}$.

Aby byly kolmé, musí jejich směrnice $k_T=3a^2$ a $k=-\frac{1}{12}$ splňovat $k_T\cdot k=-1$, proto $k_T=\dfrac{-1}{-\frac{1}{12}}=12$. Rovnice $3a^2=12$ má dvě řešení $a=\pm 2$, budou tedy dvě tečny dle zadání:

$T_1$: $y-9=12(x-2)$ neboli $y=12x-15$.

$T_2$: $y+7=12(x+2)$ neboli $y=12x+17$.

**7.** $$\int \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} y=\ln(x)+1 \\ dy=\frac{1}{x}\,dx \end{array}\right| = \int \cos(y)\,dy = \sin(y)+C$$ $$= \sin(\ln(x)+1)+C,\ x>0.$$

**8.** $$\int_1^e (18x^2+2x)\ln(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} f=\ln(x) & g'=18x^2+2x \\ f'=\frac{1}{x} & g=6x^3+x^2 \end{array}\right|$$ $$= \Big[(6x^3+x^2)\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e (6x^3+x^2)\frac{1}{x}\,dx = 6e^3+e^2-0-\int_1^e 6x^2+x\,dx$$ $$= 6e^3+e^2-\Big[2x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_1^e = 6e^3+e^2-2e^3-\frac{1}{2}e^2+2+\frac{1}{2} = 4e^3+\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{2}.$$

**9.** $$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \left| \begin{array}{c} y=e^x \\ dy=e^x\,dx \\ x=1 \implies y=e \\ x=0 \implies y=1 \end{array}\right| = \int_1^e \frac{dy}{y^2+1} = \Big[\operatorname{arctg}(y)\Big]_1^e = \operatorname{arctg}(e)-\frac{\pi}{4}.$$

**10.** $$\frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(x-3)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

$$B = \left.\frac{8x^2+8x+64}{(////)(x-3)^2(x^2+1)}\right|_{x=-1} = \frac{64}{32} = 2;$$

$$D = \left.\frac{8x^2+8x+64}{(x+1)^2(////)(x^2+1)}\right|_{x=3} = \frac{160}{160} = 1.$$

**11.** Problém v nekonečnu, jinak OK. $$\frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

$$A = \left.\frac{5x}{(\cancel{x-2})(x+3)}\right|_{x=2} = 2, \qquad B = \left.\frac{5x}{(x-2)(\cancel{x+3})}\right|_{x=-3} = 3.$$

$$\int \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}\,dx$$
$$= 2\ln|x-2| + 3\ln|x+3| + C = \ln\big|(x-2)^2(x+3)^3\big| + C.$$

(Při výpočtu nevlastního integrálu se doporučuje najít primitivní funkci v nějakém kompaktním tvaru. Tady to shodou okolností není třeba, ale někdy ano, tak je dobré si na to zvykat.)

$$\int_3^\infty \frac{5x}{(x-2)(x+3)}\,dx = \Big[\ln\big|(x-2)^2(x+3)^3\big|\Big]_3^\infty$$
$$= \lim_{x\to\infty}\big(\ln\big|(x-2)^2(x+3)^3\big|\big) - 3\ln(6) \overset{\ln(\infty)}{=\!=\!=} \infty.$$

**12.** a) Lineární nezávislost. Nejjednodušší je vytvořit matici a zeptat se na její hodnost: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vyšly dva nezávislé řádky, tedy původní dva vektory jsou nezávislé.

Pokud bychom chtěli rozhodnout podle definice, zajímala by nás množina řešení rovnice $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Vektorově

$(\alpha + 2\beta, -\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 0, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0, 0, 0, 0)$, výsledná soustava pěti rovnic má jediné řešení $\alpha = \beta = 0$, což ukazuje nezávislost.

b) $B$ generuje $V$? Vezměme libovolný vektor z $V$, tedy vektor $\vec{a} = (x, -x, y, 0, 2x)$. Dá se vyjádřit jako lineární kombinace $\vec{u}, \vec{v}$?

Jedna možnost je řešit soustavu $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{a}$ pěti rovnic o dvou neznámých, nebo dáme všechny tři vektory do matice a zeptáme se na hodnost.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ x & -x & y & 0 & 2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vyšla matice s hodností dva, tedy přidaný třetí řádek se dá vyjádřit jako kombinace prvních dvou, což přesně jsme chtěli vědět.

**13.** a) $\vec{a} + \vec{b} = (6, -6, 3, 0, 12)$.

b) Je třeba vyřešit soustavu pěti rovnic $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{a}$ neboli

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 3 \\ -\alpha - 2\beta &= -3 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \qquad \implies \alpha = -1, \beta = 2 \implies [\vec{a}]_B = (-1, 2). \\ 0 &= 0 \\ 2\alpha + 4\beta &= 6 \end{aligned}$$

Podobně pro $\vec{b}$, vyjde $[\vec{b}]_B = (1, 1)$.

c) $[\vec{a}]_B + [\vec{b}]_B = (0, 3)$.

Hledaný vektor z $V$ je $\vec{x} = 0 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} = (6, -6, 3, 0, 12) = \vec{a} + \vec{b}$.

Vyšlo to stejně jako v a), operace s vektory se převádějí na operace se souřadnicemi, což může být někdy snazší (zde dvě čísla oproti šesti u původních vektorů). To „snazší“ samozřejmě záleží na tom, zda umíme efektivně najít ty souřadnice.

# Dotazy od studentů

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

## Mohl by jste prosím ukázat příklad 6?

**6.** Najděte tečnu (tečny) ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 1$, která je kolmá (které jsou kolmé) na přímku $p : x + 12y = 1$.

tečna: $y = kx + q$

$k = f'(x_t) = 3x_t^2$

$y_t = f(x_t)$

$k = 3x_t^2$

$p: x + 12y = 1$

$k_n = \frac{n_y}{n_x} = 12$

$\vec{n} = (1, 12)$

$\vec{s} = (-12, 1)$

$\vec{n} \cdot \vec{s} = 1 \cdot (-12) + 12 \cdot 1 = 12 - 12 = 0$

$k = k_n$

$3x_t^2 = 12$

$x_t = \pm\sqrt{4}$

$x_{t\,1,2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}\right.$

$k = 12$

$y = 12x + q$

$f(2) = 12 \cdot 2 + q_1$

$9 = 24 + q_1$

$q_1 = -15$

$\boxed{y = 12x - 15}$

$f(-2) = 12 \cdot (-2) + q_2$

$-7 = -24 + q_2$

$q_2 = 17$

$\boxed{y = 12x + 17}$

Postup se opírá o znalost, že koeficinenty u $x$ a $y$ v rovnici přímky $ax+by+c=0$ jsou koeficienty normálového vektoru k přímce, $\mathbf{n}=(a,b)$.

**Důkaz:** Nechť směrový vektor přímky je $\mathbf{s}=(s_x,s_y)$. Přímka procházející bodem $A=[A_x,a_y]$ je dána soustavou v parametrickém tvaru

$$\begin{cases} x = A_x + s_x t, \\ y = A_y + s_y t. \end{cases}$$

Po eliminaci parametru $t$ dostaneme rovnici $y = A_y + s_y \dfrac{x-A_x}{s_x}$ a po úpravě

$$s_y x - s_x y + K = 0,$$

kde nedůležité konstanty jsme sloučili do jedné konstanty $K$. Protože ale vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{s}$ jsou kolmé, platí

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s} = n_x s_x + n_y s_y = 0,$$

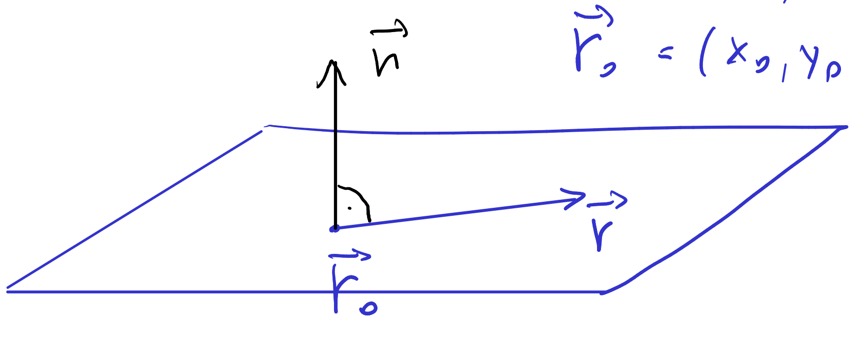
máme jedno z řešení například $\mathbf{n}=(-s_y,s_x)$ a po dosazení do rovnice přímky dostaneme

$$n_x x + n_y y + K = 0.$$

$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$ Rovnice roviny v normálovém tvaru

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$



$$(x-x_0)n_x + (y-y_0)n_y + (z-z_0)n_z = 0$$

$$\boxed{n_x x + n_y y + n_z z + d = 0}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

# Příklad 12

**12.** Uvažujte vektorový prostor $V = \{(x, -x, y, 0, 2x); x, y \in \mathbb{R}\}$ a v něm vektory $\vec{u} = (1, -1, 2, 0, 2), \vec{v} = (2, -2, 1, 0, 4)$.
Dokažte, že $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ je báze prostoru $V$.

Vyjdeme z definice báze:

- $\bar b_i$ jsou LN (1)
- $V = \langle B \rangle$ (2)

(1) $B = \{\bar b_1, \bar b_2, \dots, \bar b_n\}$

$$(x, -x, y, 0, 2x) = \alpha \bar b_1 + \beta \bar b_2$$

existuje řešení pro všechna x, y.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \bar b_1 & \bar b_2 & \begin{matrix} x \\ -x \\ y \\ 0 \\ 2x \end{matrix} \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \nabla & \vdots \\ 0 & \vdots \\ 0 & \vdots \end{array}\right)}_{\det(\nabla) \neq 0}$$

(2) $$(x, -x, y, 0, 2x) = x\underbrace{(1, -1, 0, 0, 2)}_{\bar u} + y\underbrace{(0, 0, 1, 0, 0)}_{\bar v}$$

Snadno soustředěným analytickým pohledem zjistíme, že

$$\bar a = 3\bar u \qquad \bar b = \underbrace{\bar a}_{3\bar u} + 3\bar v$$

$$\begin{pmatrix} \bar a \\ \bar b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{matice přechodu mezi bázemi}} \begin{pmatrix} \bar u \\ \bar v \end{pmatrix}$$

báze $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ a $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ jsou téhož počtu prvků, generují tedy každá prostor téže dimenze, uspořádané se dají vyjádřit jedna pomocí druhé vynásobením (regulární) maticí přechodu, generují obě tedy tentýž lineární prostor.