Doplňková matematika

Učební materiály k semináři Doplňková matematika.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

Matematický seminář: Pracovní list # 7

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = e^x \sqrt{\sin(x)+1} + \dfrac{1}{\cos(x)+1}$.

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^x + x}{\ln(13-x)} \right)$.

3. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(x \ln(e^x - 1) \big)$.

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\ln(x)}{x^2+1} \right)$.

5. Pro funkci $f(x) = |x+1|\, e^{-x}$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

6. Najděte globální maximum a minimum funkce $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$ na množině $M = \langle 1, 3 \rangle$.
Jak se změní odpověď, pokud budeme uvažovat množinu $N = \langle 1, \infty)$?

7. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x^3+13}\, dx$.

8. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (2x+8)\cos(2x)\, dx$.

9. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (e^{\sin(2x)} + 5)\cos(2x)\, dx$.

10. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)}\, dx$.

11. Vypočítejte obsah konečné oblasti vymezené křivkami $y = x^2$ a $y = x + 2$.

12. Vypočítejte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
alespoň dvěma způsoby.

13. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 + x_6 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 - 2x_6 &= 0. \end{aligned}$$

Množinu řešení vyjádřete jako lineární obal nějaké báze.

Matematický seminář: Pracovní list # 7 řešení

1. Podmínka $\sin(x)+1 \geq 0$ platí vždy. Podmínka $\cos(x)+1 \neq 0$ neboli $\cos(x) \neq -1$ dává $x \neq \pi + 2k\pi$.
Zápis pomocí intervalů? Vzniknou intervaly jako $\cdots \cup (-\pi,\pi) \cup (\pi, 3\pi) \cup \cdots$, zápis je tedy $D(f) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)$.

2. $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+x}{\ln(13-x)}\right) \overset{\frac{0+\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+1}{\frac{1}{13-x}\cdot(-1)}\right) = \lim_{x\to-\infty}\big((x-13)(e^x+1)\big) = -\infty.$$

3. Dosazení, $e^{0^+} = 1^+$, proto $\ln(e^{0^+}-1) = \ln(0^+) = -\infty$ a limita je typu $0\cdot\infty$, ten se převádí algebraickým trikem na podíl, aby šlo použít l'Hospitalovo pravidlo.
$$\lim_{x\to0^+}\big(x\ln(e^x-1)\big) \overset{0\cdot\infty}{=\!=} \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2e^x}{e^x-1}\right),$$
teď je to $\frac{0}{0}$. Lepší než aplikovat přímo l'Hospitala je limitu rozdělit:
$$\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0^+}(-e^x)\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} -1\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = 0.$$

4. $f'(x) = \cos\left(x + \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}\right)\cdot\left(1 + \dfrac{\frac{1}{x}(x^2+1) - \ln(x)2x}{(x^2+1)^2}\right)$, $x > 0$.

5. Zbavíme se absolutní hodnoty: $f(x) = \begin{cases} (x+1)\,e^{-x}, & x \geq -1; \\ -(x+1)\,e^{-x}, & x < -1. \end{cases}$

Pak $f'(x) = \begin{cases} -x\,e^{-x}, & x > -1; \\ x\,e^{-x}, & x < -1. \end{cases}$

$f' = 0 \iff \begin{cases} -x\,e^{-x} = 0, & x > -1; \\ -x\,e^{-x} = 0, & x < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, & x > -1; \\ x = 0, & x < -1 \text{ (neplatí)}. \end{cases}$

Dělící body: $x = -1$, $x = 0$.

	$(-\infty,-1\rangle$	$\langle -1, 0\rangle$	$\langle 0, \infty)$
$-x$:	/////	$+$	$-$
x :	$-$	/////	/////
e^{-x} :	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$:	$-$	$+$	$-$
$f(x)$:	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f je rostoucí na $\langle -1, 0\rangle$
f je klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0, \infty)$
lok. min: $f(-1) = 0$
lok. max: $f(0) = 1$

6. Kandidáti na globální extrémy jsou koncové body intervalu a kritické body:
$$0 = f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+4) - (x+2)^2 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{(x+2)(8-4x)}{(x^2+4)^2} \text{ dává } x = 2.$$
a) Kandidáti: $f(1) = \dfrac{9}{5}$, $f(2) = 2$, $f(3) = \dfrac{25}{13}$. Porovnáme.

Závěr: $\max_M(f) = 2 = f(2)$, $\min_M(f) = \dfrac{9}{5} = f(1)$.

b) Kandidáti (v případě problémů „dosadíme“ limitou):

$f(1) = \dfrac{9}{5}$, $f(2) = 2$, $f(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}\right) = 1$. Porovnáme.
Závěr: $\max\limits_{M}(f) = 2 = f(2)$, $\min\limits_{M}(f)$ neexistuje (infimum je rovno 1).

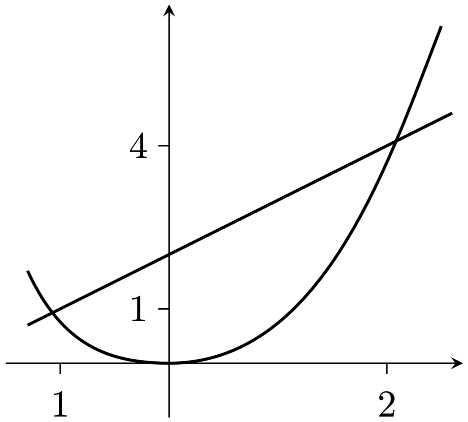
7. $$\int x^2\sqrt{x^3+13}\,dx = \left|\begin{array}{r} y = x^3+13 \\ dy = 3x^2dx \\ \frac{1}{3}dy = x^2dx \end{array}\right| = \int \frac{1}{3}\sqrt{y}\,dy = \int \frac{1}{3}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy$$
$$= \frac{1}{3}\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{x^3+13}^{\;3} + C,\ x \geq -\sqrt[3]{13}.$$

8. $$\int (2x+8)\cos(2x)\,dx = \left|\begin{array}{ll} f = 2x+8 & g' = \cos(2x) \\ f' = 2 & g = \frac{1}{2}\sin(2x) \end{array}\right|$$
$$= (2x+8)\frac{1}{2}\sin(2x) - \int \sin(2x)\,dx = (x+4)\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + C,\ x \in \mathbb{R}.$$

9. $$\int\limits_0^{\pi/4} (e^{\sin(2x)}+5)\cos(2x)\,dx = \left|\begin{array}{r} y = \sin(2x) \\ dy = 2\cos(2x)\,dx \\ \frac{1}{2}dy = \cos(2x)\,dx \\ x = \pi/4 \implies y = 1 \\ x = 0 \implies y = 0 \end{array}\right| = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(e^y+5)\,dy$$
$$= \Big[\tfrac{1}{2}(e^y+5y)\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}(e+5) - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}e + 2.$$

10. $$\frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$
Zakrývačka: $A = \dfrac{x+4}{(////)(x^2+4)}\Bigg|_{x=1} = 1$, roznásobením pak
$$\frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+4}.$$ Proto
$$\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \left|\begin{array}{r} u = x-1 \\ du = dx \end{array}\right|\left|\begin{array}{r} y = x^2+4 \\ dy = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dy = x\,dx \end{array}\right|$$
$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{\frac{1}{2}\,dy}{y} = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C,\ x \neq 1.$$
Kdo chce, napíše třeba $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+4} + C$.

11. Obrázek: Parabola proťatá přímkou.



Nutno nalézt průsečíky, jsou to body $(-1,1)$ a $(2,4)$.

Plocha je dána integrálem z „horní“ funkce mínus „dolní“, proto
$$A = \int\limits_{-1}^{2} x + 2 - x^2\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

12. Rozvoj dle prvního sloupce, pak dle prostředního řádku:

$$|A| = 0 - 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -2\cdot\left(-0 + 6\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0\right) = -12\cdot(5\cdot 2 - (-2)\cdot 3)$$
$$= 12\cdot 16 = -192.$$

Řádkovými úpravami na trojúhelníkový tvar:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & -5 & 10 \end{vmatrix} \qquad \text{aby se dole lépe odčítalo}$$
$$= -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 6\cdot 8\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot 48\begin{vmatrix} 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot 48\cdot 2\cdot 5\cdot 1\cdot 2 = -192.$$

13. Převod levých stran homogenní soustavy na matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Již je v základním tvaru. Vidíme, že pivoty nejsou v třetím, čtvrtém a šestém sloupci zleva, tyto proměnné lze tedy zvolit libovolně, zavedeme tři parametry: $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_6 = t$. Dosadíme do rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - s + t &= 0 \\ x_2 + 2s - x_5 &= 0 \implies x_5 = 2t,\ x_2 = 2t - 2s,\ x_1 = s - t. \\ x_5 - 2t &= 0 \end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy $(s-t, 2t-2s, r, s, 2t, t)$ pro $r, s, t \in \mathbb{R}$.
Vyjádříme si jej jako kombinaci vektorů:
$(s-t, t-2s, r, s, 2t, t) = r(0,0,1,0,0,0) + s(1,-2,0,1,0,0) + t(-1,2,0,0,2,1)$.
Proto je množina všech řešení rovna podprostoru

$$\big\langle\big\{(0,0,1,0,0,0), (1,-2,0,1,0,0), (-1,2,0,0,2,1)\big\}\big\rangle.$$

Dotazy od studentů

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

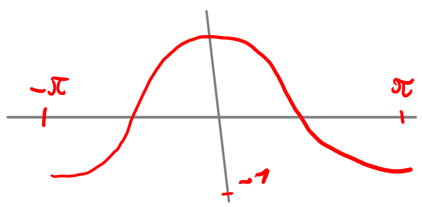
Zajímalo by mě, jak se dospělo ke druhému tvaru řešení v úloze 1.

3. Určete definiční obor funkce $f(x) = \mathrm{e}^x\sqrt{\sin x + 1} + \dfrac{1}{\cos x + 1}$.

$(-\pi, \pi)$

$(\underbrace{-\pi + 2k\pi}, \pi + 2k\pi)$

$(\pi(2k-1), \pi(2k+1))$



Funkce $\cos x$ je 2π periodická, tudíž naleznete-li jedno řešení, zde je nejjednodušší z nich interval $(-\pi, \pi)$, získáte všechna ostatní řešení posunutím o celočíselný násobek 2π, tj. $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ a zbytek je již věc úprav dolní a horní meze.

Příklad 6:

6. Najděte globální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$

a) na intervalu $\langle 1, 3\rangle$,
b) na intervalu $\langle 1, \infty)$.

stacionární body:

$$\frac{2(x+2)(x^2+4) - 2x(x+2)^2}{(x^2+4)^2} = 0$$

$$2(x+2)\underbrace{[(x^2+4) - x(x+2)]}_{4-2x} = 0$$

$$-4(x+2)(x-2) = 0 \quad < \begin{matrix} x=2 \\ x=-2 \end{matrix}$$

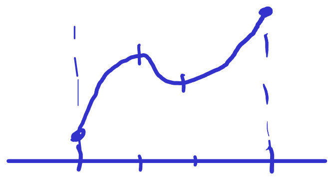
$$x = \pm 2$$

$f(-2) = \cancel{0}$ ~~min~~

$f(2) = \dfrac{16}{8} = 2$ max

$f(1) = \dfrac{9}{5}$ min $\quad 1.8 = 2 - \frac{1}{5}$

$f(3) = \dfrac{25}{13} < 2 \quad 2 - \frac{1}{13}$



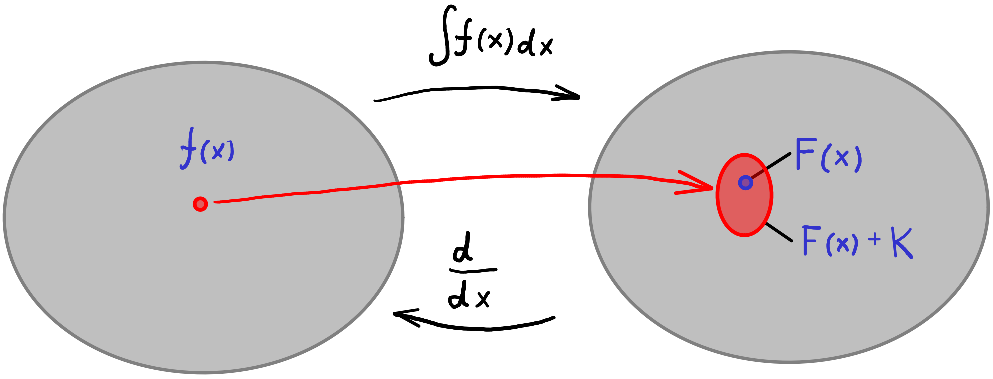
na $\langle 1, \infty)$:

$f(x) \asymp x^2 \qquad f(x)$

Typografická poznámka:

$f(x) \asymp x^2$ značí $f(x)$ je asymptoticky rovna x^2.

Vztah integrace a derivace:



Derivace je zobrazení z množiny funkcí do množiny funkcí, jejíž obraz je jediná funkce. Kdežto integrace není zobrazení ale relace, která přiřazuje jedné funkci víceprvkovou množinu. Integrál přiřazuje funkci $f(x)$ množinu funkcí lišících se o konstantu. $F(x)$ je kterýkoliv prvek z množiny obrazu $f(x)$ a jednoznačně ji celou také generuje. Nejmenší podmnožiny obrazu jsou všechny takové funkce, které v souhrnu tvoří celou množinu obrazu, tudíž se jim říká primitivní funkce.

Příklad 10:

10. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$

$$\frac{x+4}{\boxed{(x-1)}(x^2+4)} = \frac{A}{\boxed{x-1}} + \boxed{\frac{xB+C}{x^2+4}} \qquad A=1 \quad \text{(zakrývacím pravidlem)}$$

$$x+4 = 1(x^2+4) + (xB+C)(x-1)$$

$$\begin{array}{llcll} x^2: & 0 & = & 1+B & \quad B=-1 \\ x: & 1 & = & -B & \\ 1: & 4 & = & 4-C & \quad C=0 \end{array}$$

$$\int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+4}\right)dx = +\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + K = \ln\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} + K$$

Použili jsme větu, že integrál ze zlomku, v němž je v čitateli derivace jmenovatele, je roven logaritmu absolutní hodnotě jmenovatele plus integrační konstanta. Dokáže se snadno substitucí za jmenovatele a často bývá zařazován mezi tabulkové integrály.

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + K$$

Například integrál z tg x pak lze vypočítat zpaměti,

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + K.$$

Příklad 12, determinant mi vyšel -48, ve výsledcích je -192.

12. Vypočítejte determinant matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & -13 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Příklad výpočtu: 1. rozvoj podle třetího řádku, nenulový bude pouze člen násobený koeficientem na pozici (3,3), znaménko je $(-1)^{3+3} = +1$. Také je možno si všimnout, že na hlavní diagonále jsou všechna znaménka kladná.

$$|\mathbb{A}| = 6 \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -13 & 21 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot 6 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 21 \end{vmatrix} = -48 \cdot (-4) = -192.$$

Determinant Vám vyšel $4\times$ menší než podle výsledků. Zdroj chyby může být následující: U výpočtu determinantu je nutno vzít v úvahu, že na rozdíl od GEM nemůžeme násobit řádek nenulovým číslem, aniž by se změnil výsledek. U GEM je každý řádek ekvivalentní jedné rovnici soustavy a násobení řádku znamená násobení levé a pravé strany rovnice, což nezmění řešení soustavy. Podobná úprava u determinantu by však znamenala násobení výsledku týmž číslem. Proto, pokud v řádkových úpravách při výpočtu determinantu potřebujeme řádek před úpravou vynásobit, musíme týmž číslem výsledek vydělit.

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$$

U Gaussovy eliminace také nepíšeme při úpravách rovnítko ale znak $\sim$ ve významu ekvivalence soustavy. Znamená, že se nerovná matice soustavy ale rovnají se množiny řešení.

Výpočet determinantu řádkovými úpravami má tedy složitější pravidla, než GEM. Zas ale jedna výhoda oproti GEM přece jen plyne, a sice protože platí identita

$$\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^{\mathrm{T}},$$

jakákoliv věta vyslovená pro řádky, platí i pro sloupce. Při výpočtu determinantu můžeme tedy (na rozdíl od GEM, kde nemůžeme) provádět i sloupcové úpravy, pokud se to více hodí.