Doplňková matematika

Učební materiály k semináři Doplňková matematika.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

Matematický seminář: Pracovní list # 6

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln(x^2 - x) + \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

2. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \left(\frac{-\cos(x)}{\sin(x) - 1}\right)$.

3. Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$.

4. Vypočítejte limity $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\left(\tfrac{x^2}{x+1}\right) \frac{5x - x^3}{x^3 + x - 1}\right)$
a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\left(\tfrac{x^2}{x+1}\right) \frac{5x - \ln(x)}{x^3 + x - 1}\right)$.

5. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x) + 2} \cdot \left(x^3 + \ln(x^2 + 1)\right)$.

6. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt[x-1]{x^2\, e^{5x}}$.

7. Pro funkci $f(x) = x^3 - 6x \cdot |x + 1|$ určete intervaly konvexity/konkávity a inflexní body.

8. Pro funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 3 se středem $a = 0$.
Tipněte si, jak vypadá T_n.

9. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int 10(e^x + 1)^4 e^x\, dx$.

10. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (x - 1)\sin(x)\, dx$.

11. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int 18x^2 \cos(1 - x^3)\, dx$.

12. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (8x + 1)\ln(x)\, dx$.

13. Sestavte obecný rozklad racionální lomené funkce $\dfrac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x + 1)(x - 1)^2(x^2 + 4)}$ na parciální zlomky a určete ty z konstant, které lze získat zakrývací metodou.
Jestli vám zbyl čas a troufáte si, najděte i ostatní.

Matematický seminář: Pracovní list # 6 řešení

1. $x(x-1) > 0$ a $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$. První podmínka dá $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, druhá dá $-2 \leq x \leq 2$, pronikneme, $D(f) = \langle -2, 0) \cup (1, 2\rangle$.

2. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \left(\dfrac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \overset{\frac{1}{0^-}}{=\!=} -\infty.$

Proč 0^-? Pokud $x \to \frac{\pi}{2}^+$, tak se uvažují x o trošku větší než $\frac{\pi}{2}$ a pro ně je kosinus záporný (viz graf).

3. $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. Možnosti: svislá v $x = -2$, vodorovná či šikmá v ∞ a v $-\infty$. Rozhodnou limity.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x-2}{x+2}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \dfrac{\infty+1-0}{1+0} = \infty.$

Není vodorovná, ale šance na šikmou, algoritmus:

$$A = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \frac{1+0-0}{1+0} = 1.$$

Pořád šance na šikmou.

$$B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x-2}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} (-1) = -1.$$

Takže šikmá asymptota $y = x - 1$ v ∞.

b) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \left(\dfrac{x^2+x-2}{x+2}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to(-2)^+} \left(\dfrac{2x+1}{1}\right) = -3.$

Svislá není potvrzena, ale ještě má šanci. Limitu $x \to (-2)^-$ zkusíme jinak:

$$\lim_{x\to(-2)^-} \left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right) = \lim_{x\to(-2)^+} \left(\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}\right) = \lim_{x\to(-2)^+} (x-1) = -3.$$

Takže svislá asymptota v $x = -2$ určitě není.

c) Zkoumání v $-\infty$ je podobné jako v ∞:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = -\infty.$$

$$A = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right) = 1.$$

$$B = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x-2}{x+2}\right) = -1.$$

Takže šikmá asymptota $y = x - 1$ v $-\infty$.

4. Pro $x \to \infty$ je $\dfrac{x^2}{x+1} \sim \dfrac{x^2}{x} = x \to \infty$, takže první člen v obou limitách vychází $\cos(\infty)$, což neexistuje, je to stále oscilující veličina. Vše tedy závisí na tom, jak se chová druhý člen.

a) Pro $x \to \infty$ je $\dfrac{5x-x^3}{x^3+x-1} \sim \dfrac{-x^3}{x^3} = -1$. Potvrzení výpočtem, asi nejrychlejší je krácení: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-x^3}{x^3+x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\frac{5}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right) = -1.$

Každopádně násobíme člen, který osciluje mezi -1 a 1, členem, který je nakonec v zásadě roven -1, jako celek to tedy osciluje mezi -1 a 1.

Závěr: $\lim\limits_{x\to\infty}\Bigl(\cos\bigl(\frac{x^2}{x+1}\bigr)\dfrac{5x-x^3}{x^3+x-1}\Bigr)$ neexistuje.

b) Pro $x\to\infty$ je $\ln(x)\ll x$ a proto $\dfrac{5x-\ln(x)}{x^3+x-1}\sim\dfrac{5x}{x^3}\to 0$. Tento odhad potvrdíme: $\lim\limits_{x\to\infty}\Bigl(\dfrac{5x-\ln(x)}{x^3+x-1}\Bigr)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\Bigl(\dfrac{5-\frac{1}{x}}{3x^2+1}\Bigr)=0.$

Takže se člen s oscilací, která je omezená, násobí členem jdoucím k nule, proto $\lim\limits_{x\to\infty}\Bigl(\cos\bigl(\frac{x^2}{x+1}\bigr)\dfrac{5x-\ln(x)}{x^3+x-1}\Bigr)=0.$

5. $f'(x)=\Bigl[\dfrac{e^x}{\cos(x)+2}\Bigr]'\cdot\bigl(x^3+\ln(x^2+1)\bigr)+\dfrac{e^x}{\cos(x)+2}\cdot\bigl[x^3+\ln(x^2+1)\bigr]'$

$$=\frac{e^x(\cos(x)+2)-e^x(-\sin(x))}{(\cos(x)+2)^2}\cdot\bigl(x^3+\ln(x^2+1)\bigr)+\frac{e^x}{\cos(x)+2}\cdot\Bigl(3x^2+\frac{2x}{x^2+1}\Bigr),$$

$x\in\mathbb{R}$.

6. Pravidlo pro derivaci obecné odmocniny není, převod: $f(x)=(x^2e^{5x})^{1/(x-1)}$. Pravidlo pro derivaci obecné mocniny také není, řeší se to převodem na exponenciálu: $f(x)=e^{\ln((x^2e^{5x})^{1/(x-1)})}=e^{\frac{\ln(x^2e^{5x})}{x-1}}$. Teď lze derivovat, nejprve pomocí $[e^y]'=e^y\cdot y'$:

$$f'(x)=e^{\frac{\ln(x^2e^{5x})}{x-1}}\cdot\Bigl[\frac{\ln(x^2e^{5x})}{x-1}\Bigr]'=\sqrt[x-1]{x^2e^{5x}}\cdot\frac{\frac{[x^2e^{5x}]'}{x^2e^{5x}}(x-1)-\ln(x^2e^{5x})}{(x-1)^2}$$

$$=\sqrt[x-1]{x^2e^{5x}}\,\frac{\frac{2x\,e^{5x}+5x^2e^{5x}}{x^2e^{5x}}(x-1)-\ln(x^2e^{5x})}{(x-1)^2},\ x\neq 0,1.$$

7. Budeme pracovat s druhou derivací, proto se nejprve zbavíme absolutní hodnoty, rozhodne znaménko výrazu $x+1$:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-6x\cdot(x+1), & x\ge -1;\\ x^3-6x\cdot(-(x+1)), & x<-1\end{cases}=\begin{cases}x^3-6x^2-6x, & x\ge -1;\\ x^3+6x^2+6x, & x<-1.\end{cases}$$

Pak $f'(x)=\begin{cases}3x^2-12x-6, & x>-1;\\ 3x^2+12x+6, & x<-1\end{cases}$ a $f''(x)=\begin{cases}6x-12, & x>-1;\\ 6x+12, & x<-1.\end{cases}$

Dělící body: určitě $x=-1$, ještě řešíme $f''=0$:

$$\begin{cases}6(x-2)=0, & x>-1;\\ 6(x+2)=0, & x<-1\end{cases}\implies\begin{cases}x=2, & x>-1;\\ x=-2, & x<-1.\end{cases}$$

Oba body vyhovují podmínkám, za kterých se hledaly, $2>-1$ a $-2<-1$, proto jsou platné. Dělící body jsou $-2,-1,2$, budou čtyři intervaly. Vynecháme šestky, jsou kladné a znaménko neovlivní.

	$(-\infty,-2\rangle$	$\langle -2,-1\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle 2,\infty)$
$x-2:$	/////	/////	$-$	$+$
$x+2:$	$-$	$+$	/////	/////
$f''(x):$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x):$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

inflexní body:
$f(-2)=4$
$f(-1)=-1$
$f(2)=-28$

f je konvexní na $\langle -2,-1\rangle$ a na $\langle 2,\infty)$; konkávní na $(-\infty,-2\rangle$ a na $\langle -1,2\rangle$.

8. Tvar polynomu je $T_3(x) = f(0)+f'(\pi)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3$. Najdeme derivace, dosadíme:

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x+1} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} & f'''(0) = 2 \end{array}$$

$T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Trefil se, kdo zkusil $\ln(1+x) \sim x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$.

9. Složená funkce vyzývá k substituci.

$$\int 10(e^x+1)^4 e^x\,dx = \left| \begin{array}{c} y = e^x + 1 \\ dy = e^x dx \end{array} \right| = \int 10y^4\,dy = 10 \cdot \frac{y^5}{5} + C$$
$$= 2(e^x+1)^5 + C,\ x \in I\!R.$$

10. Typický příklad na per partes.

$$\int (x-1)\sin(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} f = x-1 & g' = \sin(x) \\ f' = 1 & g = -\cos(x) \end{array} \right| = -(x-1)\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx$$
$$= -(x-1)\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -(x-1)\cos(x) + \sin(x) + C,\ x \in I\!R.$$

11. Substituce projde.

$$\int 18x^2\cos(1-x^3)\,dx = \left| \begin{array}{r} y = 1 - x^3 \\ dy = -3x^2\,dx \\ -6\,dy = 18x^2\,dx \end{array} \right| = \int \cos(y)(-6)\,dy = -6\int \cos(y)\,dy$$
$$= -6\sin(y) + C = -6\sin(1-x^3) + C,\ x \in I\!R.$$

12. Další typ na per partes, tentokráte se ale bude derivovat logaritmus.

$$\int (8x+1)\ln(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} f = \ln(x) & g' = 8x+1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = 4x^2 + x \end{array} \right|$$
$$= (4x^2+x)\ln(x) - \int (4x^2+x)\frac{1}{x}\,dx = (4x^2+x)\ln(x) - \int 4x+1\,dx$$
$$= (4x^2+x)\ln(x) - 2x^2 - x + C,\ x > 0.$$

13. Obecný rozklad:

$$\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Zakrývací metoda:

$$A = \left.\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(////)(x-1)^2(x^2+4)}\right|_{x=-1} = \frac{20}{20} = 1,$$

$$C = \left.\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x+1)(////)(x^2+4)}\right|_{x=1} = \frac{30}{10} = 3.$$

Zbytek roznásobovací metodou, viz další strana jako bonus.

Nejprve vynásobíme rovnost výše jmenovatelem (za A, C dosadíme).

$$5x^3 - 19x^2 + 44 = (x-1)^2(x^2+4) + B(x+1)(x-1)(x^2+4)$$
$$+3(x+1)(x^2+4) + (Dx+E)(x+1)(x-1)^2.$$

Roznásobíme a sloučíme mocniny:

$$5x^3 - 19x^2 + 44 = (1+B+D)x^4 + (1-D+E)x^3 + (8+3B-D-E)x^2$$
$$+(4+D-E)x + (16-4B+E).$$

Porovnáním koeficientů obou stran dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + B + D &= 0 \\ 1 - D + E &= 5 \\ 8 + 3B - D - E &= -19 \\ 4 + D - E &= 0 \\ 16 - 4B + E &= 44 \end{aligned}$$

Upravíme na standardní tvar a řešíme oblíbeným způsobem (eliminací, Gauss-Jordan, Kramer), dostáváme $B = -5$, $D = 4$, $E = 8$. Proto

$$\frac{5x^3 - 19x^2 + 44}{(x+1)(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{-1}{x+1} - \frac{5}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4x+8}{x^2+4}.$$

Opravdový drsoň by ještě udělal zkoušku převedením pravé strany na společný jmenovatel.

Dotazy od studentů

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

Měl bych dotaz k 3. příkladu, šlo by to počítat tak, že vydělím mnohočlen mnohočlenem a vyjde mi funkce f(x) = x-1, která je přerušená v x = -2 ? To ale nemá vliv na asymptoty.

3. Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$.

Ano, to by šlo. Jen ale se mi to zdá zbytečně pracné, ty limity jsou rychlejší, když se nacvičí. Výsledek tímto postupem ale obdržíte také a je přesný. Poslední člen je zbytek dělený dělitelem a ten jde k nule, tudíž částečný podíl říká, čemu se funkce bude podobat pro velká x.

$$\underbrace{\frac{x^2+x-2}{x+2}}_{f(x)} \underbrace{- x}_{-\,kx} = \frac{\cancel{x^2}+x-2-\cancel{x^2}-2x}{x+2} = -1$$

$$q = -1$$

$$y = x - 1 \quad \text{asymptota}$$

$$(x^2+x-1):(x+2) = x-1$$
$$\frac{-(x^2+2x)}{-x}$$

$$\frac{P_m}{P_n} = R_{m-n} + \frac{Z_{<n}}{P_n}$$

Podle věty o dělení polynomů jsou částečný podíl R a zbytek Z určeny jednoznačně.

Máte pravdu, může to být podobně pracné, dělení je přímočarý a jednokrokový postup, zbytek nemusíte dopočítávat, protože člen se zbytkem jde pro velká x k nule a asymptotu získáte rovněž rychle.
Postup s limitami je však obecný, funguje i v případě, kdybychom měli jinou než racionální lomennou funkci. Například

$$\frac{3x\,\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}+1.$$

Chtěl bych se zeptat, jak se má počítat 2. limita ve 4. příkladu (4b).

4. Vypočítejte limity

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+x^3}{x^3+x-1}\cos\frac{x^2}{x+1}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-\ln x}{x^3+x-1}\cos\frac{x^2}{x+1}\right).$$

.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$$

argument cosinu:

$$\frac{x^2}{x+1} \approx x$$ pro velká x

tedy cos(x) osciluje pro velká x

První limita:

$$\frac{\frac{5x}{x^3}-1}{1+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}} \to -1 \qquad \text{zlomek} \to -1$$

limita neexistuje

Druhá limita:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \ \text{omezená} \\ g(x) \to 0 \end{array}\right\} \to fg \to 0$$

Závěr:

Obě limity jsou typu $K\cdot O$ kde K je omezená funkce a O je funkce oscilující kolem nuly. Pro $K\neq 0$ limita neexistuje, neboť součin osciluje, kdežto pro $K=0$ limita existuje, neboť součin $\to 0$. Hodnota $K=0$ má v tomto případě výjimečné postavení a mění povahu součinu. Funkce sice osciluje ale amplituda klesá k nule, pro každé ε z definice limity pak najdeme x_0 takové, že $|f(x)-0|<\varepsilon$ pro kterékoliv $x>x_0$, tedy limita existuje a je rovna nule.