Doplňková matematika

Učební materiály k semináři Doplňková matematika.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

Matematický seminář: Pracovní list # 5

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin(x) + \dfrac{\ln(x)+1}{\sqrt{x}}$.

2. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} \left(\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}\right)$.

3. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{1/x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\right)$.

4. Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-8}$.

5. Vyšetřete spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \le \pi; \\ \frac{\sin(2x)}{x-\pi}, & x > \pi. \end{cases}$

6. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\cos(x^3)+2}$.

7. Najděte derivaci funkce $f(x) = \left(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)^x$.

8. Pro funkci $f(x) = x^3 - 12|x+1|$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

9. Pro funkci $f(x) = x\cos(x)$ sestavte Taylorův polynom stupně 2 se středem $x_0 = \pi$.

10. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3}\,dx$.

11. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int (x+1)\,e^x\,dx$.

12. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{1}{\ln^2(x)+1}\,\frac{dx}{x}$.

13. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{(x-1)(x+2)}$.

Matematický seminář: Pracovní list # 5 řešení

1. Požadavky $-1 \le x \le 1$, $x > 0$, $\sqrt{x} \ne 0$, proto $D(f) = (0, 1\rangle$.

2. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\Big(\dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to(-1)^+}\Big(\dfrac{\frac{2x}{x^2}}{2x}\Big) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{e^{1/x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\Big) \overset{\frac{e^0-1}{\infty}=\frac{0}{\infty}}{=\!=\!=} 0.$

4. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Možnosti: svislá v $x = 2$, vodorovná či šikmá v ∞ a v $-\infty$. Rozhodnou limity.

$\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{8}{x^3}}\Big) = \dfrac{1+0}{1-0} = 1.$

Takže vodorovná asymptota $y = 1$ v ∞.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\Big) \overset{\frac{9}{0^+}}{=\!=} \infty.$

Takže svislá asymptota v $x = 2$. Jen ze zvědavosti:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\Big) \overset{\frac{9}{0^-}}{=\!=} -\infty.$

Nezávisle potvrdilo tu svislou.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-8}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to -\infty}\Big(\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{8}{x^3}}\Big) = 1.$

Takže vodorovná asymptota $y = 1$ v $-\infty$.

5. Jasně spojitá na intervalech $(-\infty, \pi)$ a (π, ∞). Spojitost v π? Porovnáme tři hodnoty.

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\big(\cos(x)\big) = -1.$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x\to\pi^+}\Big(\dfrac{\sin(2x)}{x-\pi}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\pi^+}\Big(\dfrac{2\cos(2x)}{1}\Big) = 2.$

$f(\pi) = \cos(\pi) = -1.$

Závěr: f má v bodě $x = \pi$ skokovou nespojitost. Je tam spojitá zleva.

6. $f'(x) = \dfrac{[x\sqrt{x^2+1}]'(\cos(x^3)+2) - x\sqrt{x^2+1}[\cos(x^3)+2]'}{(\cos(x^3)+2)^2}$

$= \dfrac{\big(\sqrt{x^2+1} + x\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\big)(\cos(x^3)+2) - x\sqrt{x^2+1}(-\sin(x^3)\cdot 3x^2)}{(\cos(x^3)+2)^2}$, $x \in I\!R$.

7. Je to obecná mocnina, nutno převést na exponenciálu.

$f(x) = e^{\ln\left(\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)^x\right)} = e^{x\ln\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)}$. Proto

$f(x) = e^{x\ln\left(\frac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\right)}\Big[x\ln\Big(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\Big)\Big]' = \Big(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\Big)^x \times$

$\times\Big(\ln\Big(\dfrac{\sin(x^2)+2}{e^{2x}}\Big) + x\dfrac{e^{2x}}{\sin(x^2)+2}\,\dfrac{2x\cos(x^2)e^{2x} - (\sin(x^2)+2)2e^{2x}}{(e^{2x})^2}\Big)$, $x \in I\!R$.

8. $D(f)=I\!R$. Potřebujeme derivaci, musíme se zbavit absolutní hodnoty v závislosti na znaménku výrazu $x+1$: $f(x)=\begin{cases} x^3-12(x+1), & x\geq -1;\\ x^3+12(x+1), & x<-1.\end{cases}$

Derivujeme: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-12, & x>-1;\\ 3x^2+12, & x<-1\end{cases}=\begin{cases} 3(x-2)(x+2), & x>-1;\\ 3(x^2+4), & x<-1.\end{cases}$

Osud derivace pro $x=-1$ je nejasný, nemusíme to naštěstí řešit.

Kritické body? Patrně $x=-1$, kde derivace nejspíš neexistuje, dále řešíme $f'=0$:

$$\begin{cases} (x-2)(x+2)=0, & x>-1;\\ x^2+4=0, & x<-1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\pm 2, & x>-1;\\ \text{nelze}, & x<-1.\end{cases}$$

Z první varianty ovšem neplatí $x=-2$, neboť nesplňuje $x>-1$. Dělícími body pro intervaly monotonie jsou tedy $x=-1,2$.

	$(-\infty,-1\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle 2,\infty)$
$x-2:$	/////	$-$	$+$
$x+2:$	/////	$+$	$+$
$x^2+4:$	$+$	/////	/////
$f'(x):$	$+$	$-$	$+$
$f(x):$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Závěr: f je rostoucí na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 2,\infty)$. f je klesající na $\langle -1,2\rangle$. f má lokální maximum $f(-1)=-1$ a lokální minimum $f(2)=-28$.

9. Polynom bude mít tvar $T_2(x)=f(\pi)+f'(\pi)(x-\pi)+\frac{1}{2}f''(\pi)(x-\pi)^2$. Najdeme derivace, dosadíme:

$$\begin{array}{l|l} f(x)=x\cos(x) & f(\pi)=-\pi \\ f'(x)=\cos(x)-x\sin(x) & f'(\pi)=-1 \\ f''(x)=-2\sin(x)-x\cos(x) & f''(\pi)=\pi \qquad T_2(x)=-\pi-(x-\pi)+\frac{1}{2}\pi(x-\pi)^2 \end{array}$$

10. $$\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)+3}\,dx=\left|\begin{array}{c} y=\sin(x)+3\\ dy=\cos(x)\,dx\end{array}\right|=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C$$
$$=\ln|\sin(x)+3|+C,\ x\in I\!R.$$

11. $$\int(x+1)e^x\,dx=\left|\begin{array}{ll} f=x+1 & g'=e^x\\ f'=1 & g=e^x\end{array}\right|=(x+1)e^x-\int 1\cdot e^x\,dx$$
$$=(x+1)e^x-e^x+C,\ x\in I\!R.$$

12. $$\int\frac{1}{\ln^2(x)+1}\,\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{c} y=\ln(x)\\ dy=\frac{1}{x}\,dx\end{array}\right|=\int\frac{1}{y^2+1}\,dy=\operatorname{arctg}(y)+C$$
$$=\operatorname{arctg}\big(\ln(x)\big)+C,\ x>0.$$

13. $$\int\frac{3\,dx}{(x-1)(x+2)}=\int\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\,dx.$$

$$A=\frac{3}{(////)(x+2)}\bigg|_{x=1}=1,\ B=\frac{3}{(x-1)(////)}\bigg|_{x=-2}=-1,\text{ proto}$$

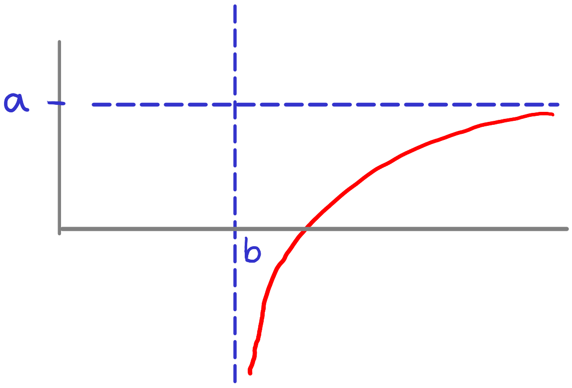
$$\int\frac{3\,dx}{(x-1)(x+2)}=\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{-1}{x+2}\,dx=\left|\begin{array}{c|c} u=x-1 & v=x+2\\ du=1\cdot dx & dv=dx\end{array}\right|$$
$$=\int\frac{du}{u}-\int\frac{dv}{v}=\ln|u|-\ln|v|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C,\ x\neq -2,1.$$

Dotazy od studentů

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

šikmé/vodorovné asymptoty ve 4. úloze?

Najděte asymptoty funkce $\quad \mathrm{f}(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-8}$.



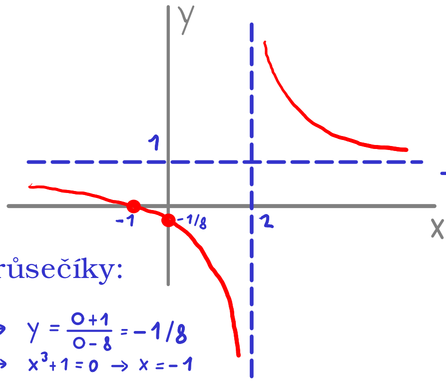
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

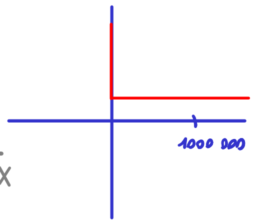
$$\frac{1}{x-b} \qquad \lim_{x\to b} \frac{1}{x-b} = \left\langle \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^3-8} = 1$$

$$\approx \frac{x^3}{x^3} \to 0 \quad \text{pro velká x}$$

$$x^3-8=0$$
$$x^3 = 8$$
$$x = 2$$





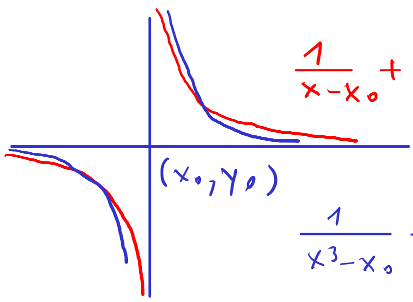
Průsečíky:

$x=0 \to y = \frac{0+1}{0-8} = -1/8$

$y=0 \to x^3+1=0 \to x=-1$

posunutá hyperbola $\quad y - y_0 = \dfrac{1}{x-x_0}$

a čím přesně jsme přišli na to, že nemůže jít o šikmé, ale opravdu jde o vodorovné?



$$\frac{1}{x-x_0} + y_0$$

$$\frac{1}{x^3-x_0} + y_0$$

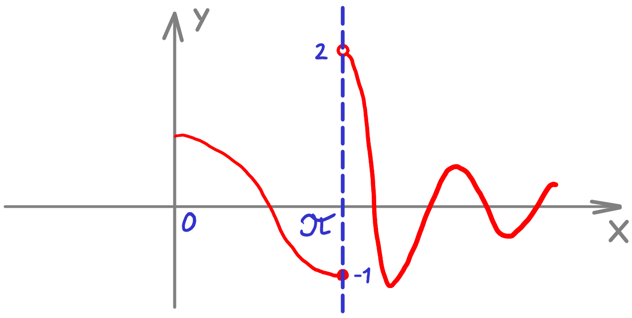
To je proto, protože limity do nekonečen jsou konstanty.

$$ax+b \qquad kx+q$$

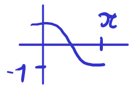
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$\frac{x^3+1}{x^4-8x} \longrightarrow 0$$

5. Vyšetřete spojtost funkce $\quad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } x \leq \pi; \\ \dfrac{\sin 2x}{x-\pi} & \text{pro } x > \pi. \end{cases}$



$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \overset{\cos\pi}{f(\pi)} = -1$$

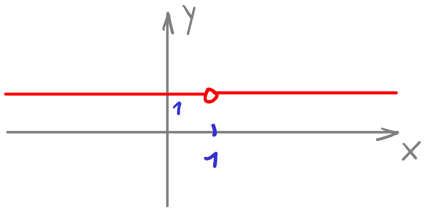


$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin 2x}{x-\pi} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\pi^+} \frac{2\cos 2x}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

L'Hospitalovo pravidlo pro typ limity $\frac{0}{0}$.

Limity se nerovnají, funkce má v bodě π nespojistost typu skok.

Nespojistost typu odstranitelný singulární bod: $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$



Vykrácením (bez podmínky $x \neq 1$) dodefinujete chybějící bod v definičním oboru limitou rovnající se limitě zprava i zleva.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ má } \textbf{pól} \text{ prvního řádu.} \\[2ex] f(x) = \sin\dfrac{1}{x} \text{ má } \textbf{podstatně singulární} \text{ bod.} \end{array}\right\}$$

Tato terminologie je z komplexní analýzy.

spočítal byste prosím příklad číslo 7

7. Zderivujte funkci $f(x) = \left(\frac{\sin x^2 + 2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)^x$.

Idea řešení spočívá na převedení mocniny na mocninu s jiným základem,

$$a = b^{\log_b a}.$$

Vztah platí proto, protože $f(x) = b^x$ a $\mathrm{g}(x) = \log_b x$ jsou inverzní funkce a pak

$$f\left(g(a)\right) = a \text{ a tedy } a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{x \log_b a},$$

$$\left(\frac{\sin x^2 + 2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{\sin x^2 + 2}{\mathrm{e}^{2x}}}$$

a dále se zderivuje jako derivace složené funkce. Odstranili jsme proměnnou ze základu a převedli jsme funkci na jinou, s konstantním základem.

K čemu je dobrý Taylorův polynom?

9. $f(x) = x \sin x, T_2(x) = ?$

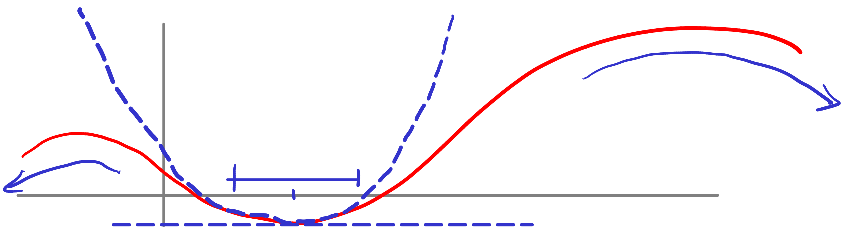
$f' = x' \cos x + x \cos' x = \cos x - x \sin x \qquad f'(\pi) = -1$

$f'' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - x \cos x \qquad f''(\pi) = +\pi$

$$T_2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 = \pi}}{=} f(\pi) + \frac{1}{1!}\underbrace{\frac{df}{dx}(\pi)}_{\text{číslo}}(x-\pi) + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{d^2f}{dx^2}(\pi)}_{\text{číslo}}(x-x)^2$$

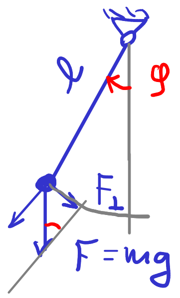
$$T = -\pi - (x-\pi) + \frac{\pi}{2}(x-\pi)^2 = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{a} x^2 + x\underbrace{(-1+\pi^2)}_{b} \underbrace{-\pi + \frac{\pi^3}{2}}_{c}$$

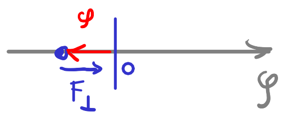
Matematická motivace, aproximace funkce



Fyzikální motivace, zjednodušení, často linearizace jinak složitého problému

matematické kyvadlo





$F_\perp = -mg \sin \varphi$

$F = ma$

$$\underbrace{-mg \sin \varphi = m l \ddot{\varphi}}$$

matematicky je to komplikovaná rovnice,
lze zlinearizovat:

$\sin(x) \approx \underbrace{0 + x}_{} - \frac{1}{6} x^3 \qquad F(x) = -kx$

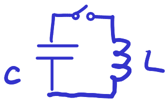
$-\cancel{m} g \varphi = \cancel{m} l \ddot{\varphi} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad \frac{g}{l} = \omega^2$

Obecně jde o rovnici lineárního harmonického oscilátoru (LHO). $\ddot{x} + \omega^2 \varphi = 0$

Tahle rovnice se již řeší snadno, má harmonické řešení se dvěma integračními konstantami, zapsané v různých tvarech jako:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = x_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re\{x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

vyjde taková rovnice nejen
u mechanických kyvadel, např.:



$\ddot{u} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u = 0$

Další matematicky užitečné vztahy odvozené pomocí Taylorova polyomu:

$$\sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{8}\xi^2 \qquad \sqrt{1.01} \doteq 1.0099$$

$$(1+\xi)^p \approx 1\binom{p}{0} + \binom{p}{1}\xi + \binom{p}{2}\xi^2$$

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{1-\xi} \approx 1+\xi$$

$$\frac{1}{1-\xi}\,\frac{1+\xi}{1+\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi^2} \approx 1+\xi$$

$$\xi = 0.001 \qquad \xi^2 = 0.000001$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Tento vztah se vyskytuje ve speciální teorii relativity, pokud bychom měli rychlost třeba jednu miliontinu rychlosti světla, nedal by se výraz vlevo na běžných kalkulačkách ani spočítat, protože od jedničky bychom odečítali číslo lišící se od jedničky až na 12. desetinném místě, což by se zaokrouhlilo také na jedničku a výpočet by selhal na dělení nulou. Rozvojem do Taylorova polynomu do lineárního členu převedeme výraz na sčítání v čitateli, přičítaný člen je výsledná korekce výsledku vzhledem k jedničce.

10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + 3}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+3}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t+3} = \left| \begin{array}{l} t+3 = s \\ dt = ds \end{array} \right| = \int \frac{ds}{s} = \frac{1}{\ln s} + K =$$

$$= \ln|t+3| + K = \underline{\underline{\ln(\sin x+3) + K}}$$

11. $\displaystyle\int (x+1)\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

per partez: $(fg)' = f'g + fg' \quad /\int$

$$fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

neumíme přímočaře zintegrovat

umíme zintegrovat snáz

$$= \left| \begin{array}{ll} f = x+1 & f' = 1 \\ g' = e^x & g = e^x \end{array} \right| = fg - \int f'g\,dx = (x+1)e^x - \int e^x dx = e^x\left[(x+\cancel{1}) - \cancel{1}\right] + K$$

$f'g$

$$= xe^x + K = F(x)$$

zkouška: $F'(x) = e^x + xe^x$

Jak řešit prosím úlohu s integrálem číslo 13?

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad ?$$

$$3 = A(x+2) + B(x-1) \rightarrow A, B \text{ má řešení}$$

$x = 1$:

$$3 = A(1+2) + B \cdot 0 \qquad A = \frac{3}{3} = 1$$

Zakrývací pravidlo:

$$\frac{3}{\boxed{(x-1)}(x+2)} = \frac{A}{\boxed{x-1}} + \boxed{\frac{B}{x+2}}$$

Za x dosadíte hodnotu, v níž jeden kořenový činitel bude nabývat nulovou hodnotu, což jsou šedé obdélníky, ty ignorujete, neboli myšleně (či fyzicky) zakryjete, ovšem výrazem se násobí zbylé zlomky a jelikož ty budou nulové, zakryjete je také (modrý obdélník). Do členů, které zbudou, měly by, pokud to uděláte správně, obsahovat již jediný neznámý koeficient, dosadíte také týž hodnotu x a spočítáte hledaný koeficient. Jelikož se jedná o jednu rovnici pro jednu neznámou s jedním členem nalevo a s jedním napravo, lze to i zpaměti. Když si to nacvičíte, tak i rychle.