Doplňková matematika

Učební materiály ke kurzu Matematika bezpečně.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a řešení (od druhé strany tohoto dokumentu) napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem tohoto doplňkového semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Soupisem nalezených chyb (od týdne 03 – 2021 také do zadání a řešení) a odpověďmi na dotazy studentů z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a průběžně bude doplňovat a také zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

Error list:

Od tohoto týdne budu chyby opravovat přímo v dokumentu zadání a řešení. Poznámka zde pouze proto, aby se čtenář nedivil, kam se seznam chyb poděl.

Matematický seminář: Pracovní list # 4

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Polynom $2.5 \cdot 10^{-4} p^2 + p + 1000$ vyjádřete jako součin kořenových činitelů.

2. Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{x} - 3}$.

3. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{e^{x^2} - 1} \right)$.

4. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to (-1)^+} \left(\frac{\sqrt{x+5}}{x^2 - 1} \right)$.

5. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{n\to \infty} \left(\frac{(-4)^n + 2^n}{(-3)^n - 2^n} \right)$.

6. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{e^{1/x} - 1}{2 \operatorname{arctg}(x) - \pi} \right)$.

7. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\left[\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)} \right]^4 \right)$.

8. Uvažujte funkci $f(x) = e^{3x-3} + 2x$. Najděte tečnu k jejímu grafu v bodě daném $x = 1$.

9. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$.

10. Najděte derivaci funkce $f(x) = \left(\dfrac{\sin(2x) + x^3}{\ln(x^4+1)} \right)^6$.

11. Najděte derivaci funkce $f(x) = e^{x \ln(\cosh(x) + 1)}$.

12. Najděte derivaci funkce $f(x) = e^{1+|2x-4|}$.

13. Pro funkci $f(x) = x^2 e^x$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

Matematický seminář: Pracovní list # 4 řešení

1. $x_{1,2} = \frac{1}{2\cdot 2.5\cdot 10^{-4}}(-1 \pm \sqrt{1-1})$, $2.5\cdot 10^{-4}\cdot(p+2000)^2$.

2. Podmínky: $x>0$, $\ln(x)>0$, $x\geq 0$, $\sqrt{x}\neq 3$, odtud $D(f)=(1,9)\cup(9,\infty)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin(x)}{e^{x^2}-1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\cos(x)}{2x\,e^{x^2}}\right) \overset{\frac{1}{0^+}}{=\!=} \infty.$

4. Po dosazení $\frac{2}{0}$. Jaká nula? $x\to(-1)^+$ dává $x>-1$, takže x leží mezi -1 a 0, proto x^2 leží mezi 0 a 1 (představím si $x=-0.99$, pak $x^2\sim 0.98$). Tedy pro $x\to(-1)^+$ máme $x^2\to 1^-$: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2-1}\right) \overset{\frac{2}{0^-}}{=\!=} -\infty.$

5. Dosazení $(-4)^\infty$ nemá smysl, je nutno přemýšlet. Pro velké hodnoty n je v čitateli dominantní $(-4)^n$, ve jmenovateli $(-3)^n$. Zlomek se tedy chová jako $\frac{(-4)^n}{(-3)^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$. Formální výpočet vytknutím a využitím $q^n\to 0$ pro $|q|<1$ (geometrická posloupnost).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-4)^n+2^n}{(-3)^n-2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-4)^n}{(-3)^n}\cdot\frac{1+\frac{2^n}{(-4)^n}}{1-\frac{2^n}{(-3)^n}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\tfrac{4}{3}\right)^n\frac{1+(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{2}{3})^n}\right) \overset{\infty\frac{1+0}{1-0}}{=\!=\!=} \infty.$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^{1/x}-1}{2\operatorname{arctg}(x)-\pi}\right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}{2\frac{1}{x^2+1}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-e^{1/x}\dfrac{x^2+1}{2x^2}\right).$

Pokračování č. 1: krácení dominant ve zlomku.

$$\ldots = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{1/x}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2}\right) \overset{-e^0\frac{1+0}{2}}{=\!=\!=} -\frac{1}{2}.$$

Pokračování č. 2: Pokud si chcete užít l'Hospitala, je nutné se zbavit éčka, l'Hospital funguje jen na podíly.

$$\ldots = \lim_{x\to\infty}(-e^{1/x})\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} -e^0\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{4x}\right) = -1\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Varianta $\ldots = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2e^{1/x}+e^{1/x}}{2x^2}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \ldots$ je pro masochisty (součinové pravidlo v čitateli).

7. Po dosazení nekonečna $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^4$. Potřebujeme použít l'Hospitalovo pravidlo, ale to lze aplikovat jen na podíly. Úprava $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left[\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}\right]^4\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{[\ln(x^2+1)]^4}{[\ln(x+1)]^4}\right)$ je pro masochisty, zkušený limitič si mocninu vytáhne z limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left[\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}\right]^4\right) = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}\right)\right]^4 \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{\frac{1}{x+1}}\right)\right]^4$$
$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x(x+1)}{x^2+1}\right)\right]^4 = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2(1+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}\right)\right]^4 = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]^4$$
$$= \left[\frac{2+0}{1+0}\right]^4 = 16.$$

8. Rovnice přímky skrz bod (a,b) je $y-b=k(x-a)$. Zde $a=1$, $b=f(1)=3$, směrnice tečny je $k_T=f'(a)=f'(1)$.
$f'(x)=3e^{3x-3}+2 \implies f'(1)=5$.
Rovnice tečny je $y-3=5(x-1)$ neboli $y=5x-2$.

9. $f'(x)=\cos(\sin(\sin(x)))\cdot\cos(\sin(x))\cdot\cos(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

10. $f'(x)=6\Big(\dfrac{\sin(2x)+x^3}{\ln(x^4+1)}\Big)^5\cdot\dfrac{(2\cos(2x)+3x^2)\ln(x^4+1)-(\sin(2x)+x^3)\frac{4x^3}{x^4+1}}{\ln^2(x^4+1)}$,
$x\neq 0$.
Nutno zajistit existenci logaritmu, díky $x^4+1>0$ existuje pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Dále nutno zajistit $\ln(x^4+1)\neq 0$ neboli $x^4+1\neq 1$.

11. Pravidlo pro složenou funkci dává $[e^y]'=e^y\cdot y'$.
$f'(x)=e^{x\ln(\cosh(x)+1)}\Big(\ln(\cosh(x)+1)+x\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1}\Big)$, $x\in\mathbb{R}$.
Chceme $\cosh(x)+1>0$, pro $x\in\mathbb{R}$ máme dokonce $\cosh(x)\geq 1$.

12. Nejprve nutno odstranit absolutní hodnoty, podmínka je $2x-4\geq 0$ neboli $x\geq 2$.
$f(x)=\begin{cases} e^{1+(2x-4)}, & x\geq 2;\\ e^{1-(2x-4)}, & x<2\end{cases}=\begin{cases} e^{2x-3}, & x\geq 2;\\ e^{5-2x}, & x<2.\end{cases}$ Proto
$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x-3}, & x>2;\\ -2e^{5-2x}, & x<2.\end{cases}$
Neznáme derivaci ve dvojce, je nutno použít jednostranné derivace:
$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\big(f'(x)\big)\overset{x>2}{=\!=}\lim\limits_{x\to 2^+}(2e^{2x-3})=2e$,
$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\big(f'(x)\big)\overset{x<2}{=\!=}\lim\limits_{x\to 2^-}(-2e^{5-2x})=-2e$.
Nerovnají se, tudíž závěr je $f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x-3}, & x>2;\\ \text{neex.}, & x=2;\\ -2e^{5-2x}, & x<2.\end{cases}$

13. $D(f)=\mathbb{R}$. $f'(x)=2x\,e^x+x^2e^x=(x+2)x\,e^x$.
Kritické body: $f'(x)=0 \implies x=-2,0$. Tři intervaly monotonie.

	$(-\infty,-2\rangle$	$\langle -2,0\rangle$	$\langle 0,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$:	$+$	$-$	$+$
$f(x)$:	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Závěr: f je rostoucí na $(-\infty,-2\rangle$ a na $\langle 0,\infty)$; f je klesající na $\langle -2,0\rangle$.
f má lokální maximum $f(-2)=4e^{-2}$ a lokální minimum $f(0)=0$.
Poznámka: Odpověď, že f je rostoucí na $(-\infty,-2\rangle\cup\langle 0,\infty)$, je chybná.

Dotazy od studentů:

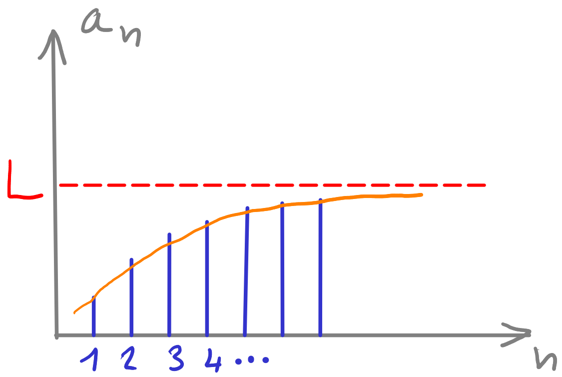
Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

Limity, k čemu jsou a jak se počítají:

Limita posloupnosti:

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

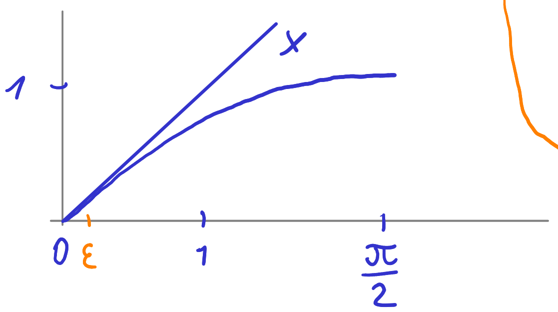
n	a_n
1	1/2
2	1
3	1.4
$\vdots$	
1000	$\frac{1999}{1001} = 1.998$
$\vdots$	
velké	≈ 2 = Limita



$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{2n-1}{n+1} = \lim \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = \underline{\underline{2}}$$

Funkce, na rozdíl od posloupnosti, může mít limitu také ve vlastním bodě, neboli $x \to x_0$. Vlastní bod je bod, který má, na rozdíl od ∞, číselnou hodnotu.

Tabulkové limity: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x-1)}{x}=1$

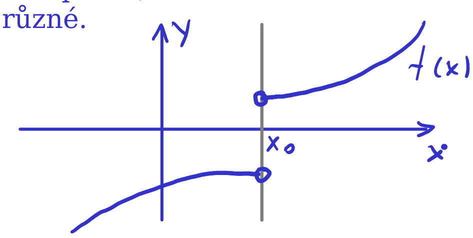


$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon = 0{,}01\\ x \approx \sin x \approx 0.01\\ \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \doteq 1\end{array}\right.$$

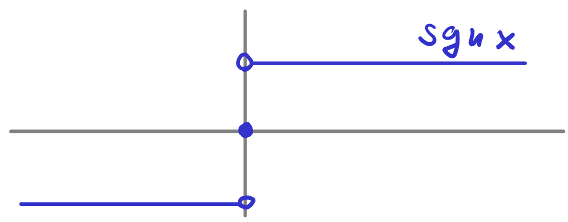
intuitivní pohled na limitu číselně

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{e^{x^2}-1} \underset{\uparrow\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2xe^{2x}} \underset{\uparrow\ \text{typu } \frac{K}{0^+}}{\longrightarrow} \infty$

Limita zleva a zprava, mohou být různé.



$$\operatorname{sgn} x \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x = -1$

Ve 13 mi vyšlo jinak maximum a minimum, v bodě 0 mi vyšlo maximum 2 a v bodě -2 mi vyšlo minimum -2e^-2.

Pro funkci $f(x) = x^2\, e^x$ určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy.

$f' = e^2(2x + x^2)$

stacionární body:

$$f'(x) = 0$$
$$2x + x^2 = 0$$
$$x(2+x) = 0$$
$$x_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

Intervaly monotónie: $\langle -\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, \infty)$

Typ monotónie:

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
monotonie	↗		↘		↗
extrém		maximum		minimum	

$$f(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = 4/e^2 \approx 0.5413$$
$$f(0) = 0^2 e^0 = 0$$