Doplňková matematika

Učební materiály k semináři Doplňková matematika.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz*.

Matematický seminář: Pracovní list # 3

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Pro $z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$ a $z_2 = 2e^{-\pi i}$ spočítejte $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$.
Výsledek $z_1 + z_2$ uveďte v exponenciálním tvaru.
Výsledek $z_1 \cdot z_2$ uveďte v algebraickém tvaru.

2. Určete definiční obor funkce $f(x) = e^{\sin(x)} + \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{\ln(x)}$.

3. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sin(x)e^x + \ln(x^4+1) + 3x^2 - 1$.

4. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$.

5. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x\, e^x}{x^2+1}$.

6. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{e^x - 1}$.

7. Najděte derivaci funkce $f(x) = \big(x\sin(2x)\big)^5$.

8. Najděte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin(x)+3}{x}}$.

9. Najděte f' a f'' pro funkci $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$.

10. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x^2}{e^x - 1}\right)$.

11. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{e^x}{\ln(x)}\right)$.

12. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}\right)$.

13. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{e^x}\right)$.

Matematický seminář: Pracovní list # 3 řešení

1. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2$, proto $z_1 + z_2 = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$.

$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i} = -4 - 4i.$ $\qquad \dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}.$

2. ln $\implies$ $x > 0$ a $\ln(x) \neq 0$, proto $D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$.

3. Nejprve linearita, pak součin a složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\sin(x)]'e^x + \sin(x)[e^x]' + [\ln(x^4+1)]' + 3[x^2]' - [1]' \\ &= \cos(x)\, e^x + \sin(x)e^x + \tfrac{1}{x^4+1} \cdot [x^4+1]' + 3 \cdot 2x - 0 \\ &= \cos(x)\, e^x + \sin(x)e^x + \tfrac{4x^3}{x^4+1} + 6x,\ x \in I\!R. \end{aligned}$$

Je třeba zajistit $x^4 + 1 > 0$, to ale platí pro všechna reálná čísla.

4. Nejprve podíl, pak složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[e^{2x}]'\sqrt{x} - e^{2x}[\sqrt{x}]'}{[\sqrt{x}]^2} = \frac{e^{2x} \cdot [2x]'\sqrt{x} - e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{e^{2x} \cdot 2\sqrt{x} - e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x},\ x > 0. \end{aligned}$$

Kdyby někdo chtěl, může dále zjednodušit:

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 4[\sqrt{x}]^2 - e^{2x}}{2\sqrt{x}x} = \frac{4x\, e^{2x} - e^{2x}}{2\sqrt{x}x},\ x > 0.$$

5. Nejprve podíl, pak součin:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[x\, e^x]'(x^2+1) - x\, e^x[x^2+1]'}{(x^2+1)^2} = \frac{([x]'e^x + x[e^x]')(x^2+1) - x\, e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1 \cdot e^x + x\, e^x)(x^2+1) - x\, e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1 \cdot e^x + x\, e^x)(x^2+1) - x\, e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2},\ x \in I\!R. \end{aligned}$$

6. Nejprve podíl, pak složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\sin(x^2)]'(e^x-1) - \sin(x^2)[e^x-1]'}{(e^x-1)^2} = \frac{\cos(x^2) \cdot [x^2]'(e^x-1) - \sin(x^2)e^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{\cos(x^2) \cdot 2x(e^x-1) - \sin(x^2)e^x}{(e^x-1)^2},\ x \neq 0. \end{aligned}$$

7. Nejprve mocnina a složená funkce, pak součin, na závěr složená funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big[x\sin(2x)\big]' = 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big([x]'\sin(2x) + x[\sin(2x)]'\big) \\ &= 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big(1 \cdot \sin(2x) + x\cos(2x)[2x]'\big) \\ &= 5\big(x\sin(2x)\big)^4 \cdot \big(\sin(2x) + 2x\cos(2x)\big),\ x \in I\!R. \end{aligned}$$

8. Nejprve odmocnina a složená funkce, pak podíl:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\sin(x)+3}{x}}} \cdot \Big[\frac{\sin(x)+3}{x}\Big]'$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\sin(x)+3}} \cdot \frac{[\sin(x)+3]'x - (\sin(x)+3)[x]'}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{\sin(x)+3}} \cdot \frac{\cos(x)\cdot x - (\sin(x)+3)}{x^2},\ x > 0.$$

9. Součin:

$$f'(x) = [\sin(x)]'\cos(2x) + \sin(x)[\cos(2x)]'$$
$$= \cos(x)\cos(2x) + \sin(x)(-\sin(2x))[2x]' = \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x).$$
$$f''(x) = [\cos(x)]'\cos(2x) + \cos(x)[\cos(2x)]'$$
$$-\big(2[\sin(x)]'\sin(2x) + 2\sin(x)[\sin(2x)]'\big)$$
$$= -\sin(x)\cos(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(2x) - 4\sin(x)\cos(2x)$$
$$= -4\cos(x)\sin(2x) - 5\sin(x)\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}.$$

10. $$\lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{x^2}{e^x-1}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{[x^2]'}{[e^x-1]'}\Big) = \lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{2x}{e^x}\Big) \overset{\frac{0}{1}}{=\!=} 0.$$

11. $$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{e^x}{\ln(x)}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{[e^x]'}{[\ln(x)]'}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{e^x}{\frac{1}{x}}\Big) = \lim_{x\to\infty}(x\,e^x) = \infty.$$

12. $$\lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\Big) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{[\sin(\pi x)]'}{[x-1]'}\Big) = \lim_{x\to 1^+}\Big(\frac{\pi\cos(\pi x)}{1}\Big)$$
$$= \pi\cos(\pi) = -\pi.$$

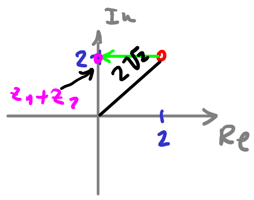
13. $$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{x^2+1}{e^x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{[x^2+1]'}{[e^x]'}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2x}{e^x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{2}{e^x}\Big) \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0.$$

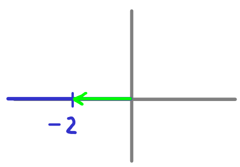
Dotazy od studentů:

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

můžu se zeptat? jak se má počítat 1. příklad?

$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$ $\qquad$ $z_2 = 2e^{-\pi j}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = |z|\cos\alpha \\ y = |z|\sin\alpha \end{cases}$





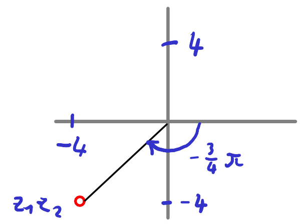
$2+2j$ $\qquad$ $-2+0j$

$z_1+z_2 = 2-2+2j = 2j$

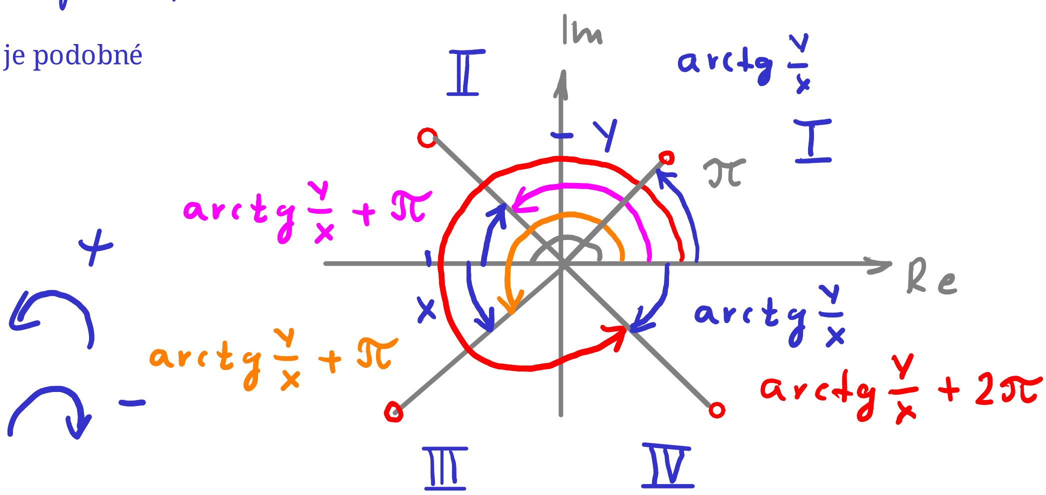
$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\, e^{j(\alpha_1+\alpha_2)} = 2\sqrt{2}\cdot 2\, e^{j(\frac{\pi}{4}-\pi)} = 4\sqrt{2}\, e^{-j\frac{3}{4}\pi}$

$= (2+2j)(-2) = -4-4j$

v alg. tvaru



Dělení je podobné



a je pak nějaký "správnější" zápis argumentu 5/4 nebo -3/4?

Není, komplexní čísla s oběma argumenty dají týž bod v Gaussově rovině a totéž číslo v algebraickém tvaru. Je to proto, že oba argumenty se liší o 2π a funkce sinus a cosinus mají periodu 2π.

V příkladu 1 mě zajímá, zda je možné sčítat, násobit v exponenciálním tvaru

Transformační vztahy z algebraického na goniometrický/exponenciální tvar jsou ekvivalentní známé transformaci polární → kartézské souřadnice:

$$\begin{cases} x = |z| \cos\alpha \\ y = |z| \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha = \operatorname{tg}\frac{y}{x} + k\pi \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$, volí se podle kvadratu a konvence. Pro konvenci $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ je $k = 0$ pro I. kvadrant, $k = 1$ pro II. a III. kvadrant a $k = 2$ pro IV. kvadrant.

$$z = z_1 + z_2$$

$$|z| = \sqrt{(|z_1|\cos\alpha_1 + |z_2|\cos\alpha_2)^2 + (|z_1|\sin\alpha_1 + |z_2|\sin\alpha_2)^2}$$

Podobně "ošklivý" vzorec by byl pro argument součtu.

Odpověď na sčítání v exponenciálním tvaru je tedy záporná, jde to ale složitě. Naopak ale násobení je snazší, podle vzorce

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)\right).$$

2. k zápisu výsledku:

Ekvivalentní zápisy téže množiny, tedy i výsledku příkladu 2:

$$D(\mathrm{f}) = (0,1) \cup (1,\infty) = (0,\infty) \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ \wedge \ x \neq 1\}.$$

4. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{x}}$.

$$\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(e^{2x})'\sqrt{x} - e^{2x}(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2e^{2x}\sqrt{x} - \frac{1}{2}e^{2x}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = e^{2x}\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{2x}\right)} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\left(2 - \frac{1}{2x}\right).$$

Příklad uvádíme kvůli trochu jinak upravenému výsledku oproti učebnímu textu.

8. Najděte 1. a 2. derivaci funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x + 3}{x}}$.

$$\left(\sqrt{\frac{\sin x+3}{x}}\right)' = \left[\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x+3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos x\cdot x - \sin x - 3}{x^2} = \frac{(x\cos x - \sin x - 3)}{\sqrt{\sin x+3}\quad 2x^{3/2}} = \frac{x\cos x - \sin x - 3}{2\sqrt{x^3(\sin x+3)}}$$

vzorce pro derivaci
složené funkce a podílu

Příklad zde zařazujeme také proto, že má být správně uvedena podmínka $x > 0$, v učebním textu bylo $x \neq 0$.* Všimněte si, že to platí v různých variantách úpravy výsledku. Proměnná pod společnou odmocninou je umocněna na lichou mocninu, což může dát záporný výsledek, který je nutno dodatečnou podmínkou vyloučit.

* Již v textu opraveno, 2023.

V jednom cvičení si této podmínky všiml jeden student (a chybu v textu tím našel), rozebrali jsme to trochu obšírněji a písemný výsledek zde rovněž kopíruji:

U příkladu číslo 8 mám dotaz k Df (x se nesmí rovnat nule) nemělo by tam být spíše "x musí být kladné"?

$$\sqrt{\frac{\sin x + 3}{x}}$$

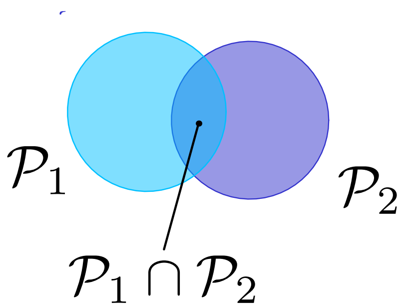
čitatel > 0 vždy

- jmenovatel $x \neq 0$
- $\dfrac{\sin x + 3}{x} \geq 0 \rightarrow x > 0$

$\Bigg\}\ x > 0$

Dávám Vám za pravdu (ústní debata při cvičení), že druhá podmínka vede k ostré, nikoliv neostré nerovnosti.
I jen z druhé podmínky plyne nenulovost x.

Tedy máte pravdu. A odhalil jste chybu v textu, které si nikdo za mnoho let nevšiml. Některé chyby jsou zjevné ihned nebo proto, že nesouhlasí výsledek, u jiných ji člověk nalezne pečlivým logickým přezkoumáním příkladu, což je ale časově náročné a málo kdo to udělá, když jinak výsledek souhlasí.



$$\mathcal{P}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid p_1(x)\}$$

množina

podmínka

Podmínka určuje pravdivost nebo nepravdivost pro každé x, definuje také množinu všech x, pro která je podmínka pravdivá. Na podmínky lze tudíž nahlížet jak z pohledu logiky, tak z pohledu množin.

9. Najděte první a druhou derivaci funkce $f(x) = \sin x \cos 2x$.

f' $\cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x$

f'' $-\sin x \cos 2x - 2\cos x \sin 2x - 2\cos x \sin 2x - 4 \sin x \cos 2x = -5 \sin x \cos 2x - 4 \cos x \sin 2x$

Tento příklad je zde spíše kvůli chybě v původním oficiálním řešení, již je v textu opravena.

Lze zjednodušit výsledek pomocí vzorců pro sin a cos dvojnásobného argumentu?

Platí vzorce

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

ale již pouhým pohledem na ně bez výpočtu je zřejmé, že po dosazení do předchozího výsledku dostaneme více členů, některé umocněné. Výsledek tedy jednodušší nebude, ať už za míru jednoduchosti bereme počet členů, počet matematických operací nebo počet znaků v zápisu.

Lze spočítat limitu v zadání číslo 11 bez použití L'Hospitalova pravidla?

11. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$.

Na semináři (2023-11-08) jsme v omezeném čase zkoušeli několik substitucí ale ani jedna nevedla k cíli, vždy jsme jen získali stejně obtížnou limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ nebo podobný obtížný typ. Zkusme sjednotit základ čitatele a jmenovatele a obojí převést na společný exponent, čitatel necháme a upravíme jmenovatel:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\ln\ln x}} = \mathrm{e}^{x-\ln\ln x}.$$

Tím jsme však převedli limitu na typ $\infty - \infty$. Vytknutím jednoho či druhého členu před závorku se zas vracíme k podílu nekonečen. Toto tedy také nevede k cíli a uvádíme to proto, abychom ukázali další možnost úpravy užitečná třeba jindy. Zkusme ale substituci za jmenovatel, $y = \ln x$, a exponenciální funkci v čitateli rozvinout v řadu, nejprve vnější exponenciálu:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^y}}{y} = \frac{1}{y}\left(1 + \mathrm{e}^y + \frac{1}{2!}\mathrm{e}^{2y} + \cdots\right).$$

Členy řady jsou opět exponenciální funkce, jelikož máme složenou funkci dvou exponenciálních funkcí a argumentem té vnější je také exponenciální funkce. Každou z exponenciálních funkci v závorce taktéž rozvineme, dostaneme

$$\frac{1}{y}\left(1 + 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}2y + \frac{1}{2!\times 2!}(2y)^2 + \cdots\right).$$

Důležité je, že závorka obsahuje pouze kladná znaménka a členy jsou buď konstanty nebo přirozené mocniny y. Konstanty se po vynásobení $1/y$ změní v hyperbolické funkce, které jdou pro $y \to \infty$ k nule, první mocniny se změní v konstanty a zbudou mocniny y^n s $n > 1$, které pouze sníží stupeň mocniny o 1 a jdou každá k nekonečnu. Tudíž výsledek jde k nekonečnu.

Poznámka k matematické rigoróznosti:

Za důkaz se považuje postup, kdy tvrzení převádíme axiomaticky definovanými operacemi dané algebry na tvrzení již dokázané dříve nebo na předpokládané tvrzení, tedy jiné axiomy. Jiné než v důkazu použité, abychom se vyhnuli důkazu kruhem. Zde se nabízí otázka, zda můžeme použít v důkazu mocninou řadu. Museli bychom k tomu mít věty podobné pro limitu součtu avšak pro nekonečný počet sčítanců. Pro nematematika (například studenta u zkoušky) můžeme používat méně rigorózní postup a to takový, že lze předpokládat cokoliv, s čím bude souhlasit zkoušející a nebude po Vás již chtít dokázat daný předpoklad. Říkejme tomu třeba pragmatický přístup k důkazu.

Zde jsme předpokldádali, že můžeme funkce rozvíjet v mocninné řady, že můžeme násobit řadu jinou funkcí člen po členu (násobili jsme zlomkem $1/y$) a že v limitě platí, že výrazy typu $K + \infty$ i $\infty + \infty$ jsou nekonečné i pro nekonečný počet členů v součtu. Upozorňujeme, že všechny obvyklé vlastnosti algebry s konečným počtem operací nejsou přenositelné na řady. Nekonečná změna pořadí operací v nekonečné řadě (číselné i mocninné) může měnit výsledek. Součet například není komutativní, zaměňujeme-li nekonečný počet sčítanců apod.

Ještě další možnost úpravy:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)\left(\lim_{y\to\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{y}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^2$$

a zbytek je analogický a necháme ho již na čtenáři.

12. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sin\pi x}{x-1}\right)$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\pi x}{x-1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hosp.}}}{=}\lim\frac{+\cos\pi x\cdot(\pi x)'}{1}=-\pi$$

Alternativní postup bez použití L'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\pi x}{x-1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{substituce}\\ y=x-1}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin\pi(y+1)}{y}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vzorec}\\ \sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos\pi y\,\overset{0}{\sin\pi}+\sin\pi y\,\overset{1}{\cos\pi}}{y}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{substituce}\\ z=\pi y}}{=}\pi\underbrace{\lim_{z\to 0^+}\frac{\sin z}{z}}_{1}=\pi$$

Ve druhém postupu jsme substitucemi převedli výraz na známou tabulkovou limitu. Evidentně je postup delší, zato však není třeba umět derivovat. L'Hospitalovo pravidlo je postup za využití derivací, který je úspornější, vyžaduje však více teorie.

Já bych měl dotaz, ale ne k zadání, proč tato funkce bude definovaná pro všechna reálná čísla, když samotný arccos je definovaný pouze na <-1;1>

$$\arccos\frac{x^3}{x^6+1}$$

Argument arccos musí splňovat dvě podmínky: $-1\le\arccos\dfrac{x^3}{x^6+1}\le 1$

Pravá nerovnost:

Jmenovatel je vždy kladný, lze jím násobit.

$$x^3\le x^6+1$$
$$x^3-x^6\le 1$$
$$x^3(1-x^3)\le 1$$

substituce $u=x^3$:

$$u(1-u)\le 1$$
$$-u^2+u-1\le 0$$
$$u^2-u+1\ge 0$$

$$D=b^2-4ac=1-4<0$$

$u\in\mathbb{R}$, $x=\sqrt[3]{u}$ $\quad\underline{\underline{x\in\mathbb{R}}}$

Levá nerovnost, postup podobný:

$$-x^6-1\le x^3$$
$$-x^6-x^3-1\le 0$$
$$x^6+x^3+1\ge 0$$

substituce $u=x^3$:

$$u^2+u+1\ge 0$$

$$D=b^2-4ac=1-4<0$$

Polynom vlevo nemá reálné kořeny, je tedy vždy kladný.

$u\in\mathbb{R}$, $x=\sqrt[3]{u}$ $\quad\underline{\underline{x\in\mathbb{R}}}$