Doplňková matematika

Učební materiály k semináři Doplňková matematika.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

Matematický seminář: Pracovní list # 2

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.
Pokud máte pocit, že nestihnete na semináři všechno, tak se zaměřte hlavně na témata, která vás nejvíce pálí.

1. Zjednodušte co nejvíce $[(a+2)(a+3)-(a+2)^2]^3 - a^3$.

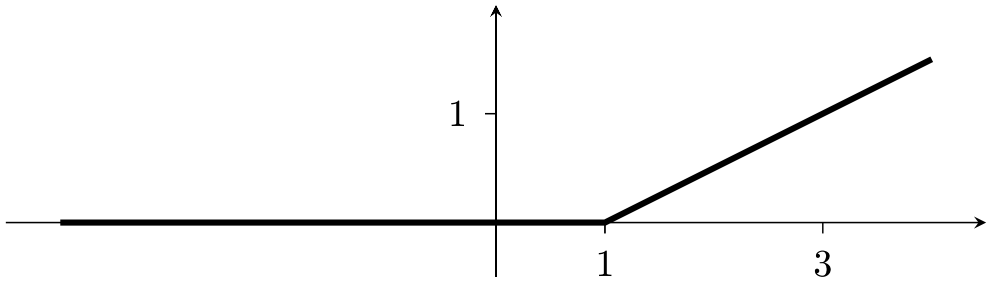
2. Zjednodušte co nejvíce $\left[\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^3 \Big/ \dfrac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right] \cdot \dfrac{n}{3}$.

3. Pro $z_1 = 3+3i$ a $z_2 = 2-i$ spočítejte z_1+z_2, $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$. Výsledek $\frac{z_1}{z_2}$ uveďte v základním algebraickém tvaru.
Vyjádřete z_1 v exponenciálním tvaru.

4. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $(1,2)$ a má směrnici $\frac{1}{3}$.

5. Napište rovnici přímky, která prochází body $(1,3)$ a $(2,5)$.

6. Napište rovnici funkce $\mathbb{R}$, jejíž graf vypadá takto:



7. Vyřešte rovnici $\quad \ln(x-1) = 2$.

8. Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2-25} + \ln\big(\sqrt{x}-2\big)$.
Výsledek zapište pomocí intervalů.

9. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{\ln(x-1)}{x^3-3}\right)$.

10. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{\cos(x)}{x-2}\right)$.

11. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)$.

12. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x\sin(x)}{x+1}\right)$.

13. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\,\right)$.

Matematický seminář: Pracovní list # 2 řešení

1. Správná odpověď: $[2+a]^3 - a^3$ nebo $6a^2 + 12a + 8$.

2. $\left[\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^3 \Big/ \frac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right] \cdot \frac{n}{3} = \frac{\frac{(n+2)^3}{(n-2)^3}}{\frac{n\cdot(n^2+4n+4)}{3(n^2-4n+4)}} \cdot \frac{n}{3}$

$$= \frac{(n+2)^3}{(n-2)^3} \cdot \frac{n^2-4n+4}{n^2+4n+4} = \frac{(n+2)^3}{(n-2)^3} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n+2)^2} = \frac{n+2}{n-2}.$$

3. $z_1 + z_2 = 5 + 2i$.

$z_1 \cdot z_2 = (3+3i)(2-i) = 6 - 3i + 6i - 3i^2 = 9 + 3i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+3i}{2-i} = \frac{(3+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{3+9i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i$.

$|z_1| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_1)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{3}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, proto $z_1 = 3\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$.

4. $y - 2 = \frac{1}{3}(x-1)$ neboli například $3y = x + 5$.

5. Směrnice je $k = \frac{5-3}{2-1} = 2$. $y - 3 = 2(x-1)$ neboli například $y = 2x + 1$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(x-1); & x > 1 \end{cases}$ nebo $f(x) = \begin{cases} 0; & x < 1; \\ \frac{1}{2}(x-1); & x \geq 1. \end{cases}$

7. $e^{\ln(x-1)} = e^2$ odtud $x - 1 = e^2$, proto $x = e^2 + 1$.

8. Podmínky: z arctg nic, jinak $x^2 - 25 \neq 0$, $\sqrt{x} - 2 > 0$ a $x \geq 0$.
$D(f) = (4,5) \cup (5,\infty)$.

9. $\ln(0^+) = -\infty$, proto $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln(x-1)}{x^3-3}\right) \overset{\frac{-\infty}{-2}}{=\!=\!=} \infty$.

10. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\cos(x)}{x-2}\right) \overset{\frac{\cos(2)}{0^+}}{=\!=\!=} -\infty$, protože $2 > \frac{\pi}{2}$, $2 < \frac{3\pi}{2}$ a tedy $\cos(2) < 0$.

11. $e^{0^-} = 1^-$ (viz například graf), tudíž $x \to 0^-$ znamená $e^x - 1 \to 0^-$. Proto $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) \overset{\frac{1}{0^-}}{=\!=\!=} -\infty$.

12. Po dosazení vyjde $\frac{\infty\cdot ?}{\infty}$ (sinus osciluje v ∞). Chce to trik, třeba zkrátit x:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\sin(x)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x}}\right) \overset{\frac{\sin(\infty)}{1}}{=\!=\!=} ?$

Úvaha: Pro $x \sim \infty$ je $\frac{\sin(x)}{1+\frac{1}{x}} \sim \frac{\sin(x)}{1} = \sin(x)$, proto $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\sin(x)}{x+1}\right)$ neexistuje.

13. Po dosazení vyjde $\infty - \infty$, je třeba trik.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}^{\,2} - \sqrt{x-1}^{\,2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) \overset{\frac{2}{\infty}}{=\!=\!=} 0.$$

Dotazy od studentů:

Tato část vznikla v roce 2020 v době koronavirové on–line výuky, kdy se místo tabule používalo dotykové pero a elektronický poznámkový blok. Dotazy byly seřazeny podle pořadí příkladů v zadání a zpravidla doplněny vysázeným zadáním, z důvodu pohodlí pro čtenáře, aby se nemuselo v dokumentu rolovat na zadání. Budete-li mít dotaz, který ještě nebyl zodpovězen, neváhejte napsat na *zacekm@fel.cvut.cz*, odpověď může být přidána.

mam dotaz na priklad 3, a to konkretne na exponencialni tvar z1

Pro $z_1 = 3 + 4j$ a $z_2 = 2 - j$ spočítejte $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$. $\frac{z_1}{z_2}$ uveďte v algebraickém tvaru.

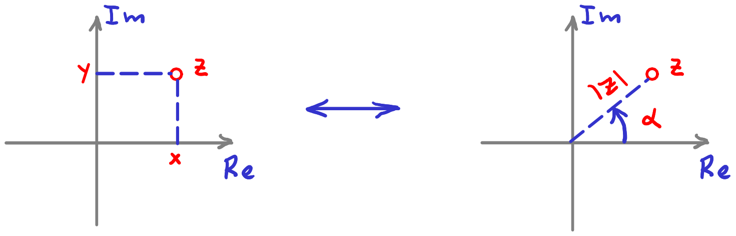
Obecně jsou transformační vztahy týž jako při přechodu od kartézských souřadnic k polárním.

$$z = x + jy = |z|(\cos\alpha + j\sin\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= |z|\cos\alpha \\ y &= |z|\sin\alpha \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi \end{aligned}\right.$$

k je celé číslo, liší se podle kvandrantu a konvence

graficky:

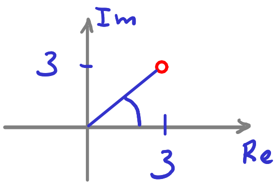


Konvence:

$\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$

U příkladu 3 však lze řešit bez výpočtu, po zakreslení zadaného čísla do Gaussovy roviny lze velikost i argument rovnou odečíst.

$z_1 = 3 + 3j$



$$|z| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{3\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}}}$$

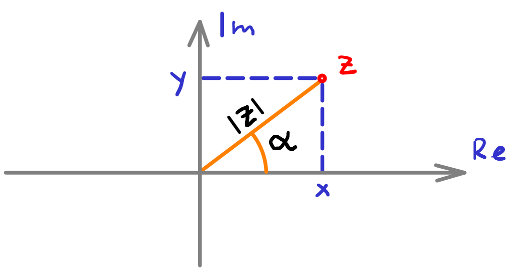
Tabulkové limity (dokazují se přímo z definice limity, popř. L'Hospitalovým pravidlem):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Dobrý den, mohu poprosit o teorii k exponenciálnímu tvaru komplexního čísla?

Komplexní číslo $z = (x, y) = x + jy$ vymyšleno na řešení neúplnosti algebry s reánými čísly, ve které byly některé inverzní úlohy neřešitelné. Ty, které vedly na sudou odmocninu ze záporného čísla. Algebra s komplexními čísly byla zavedena tak, aby byla zobecněním reálných čísel a s nimi fungovala stejně ale měla reprezentanty pro odmocninu ze záporného čísla, která ve světě reálných čísel neexistují. Zjistilo se, že potřebují dvě složky reálných čísel, nedají se například již uspořádat ale dají se reprezentovat bodem v rovině. Navíc se ukázalo, že již se v komplexním oboru nestane, že bychom dříve či později narazili na další typ inverních úloh, jako to bylo dosud (připomenu, že inverzní úloha k rovnicím se sčítáním vedla k potřebě záporných čísel, inverzní úloha k rovnicím s násobením vedla k nutnosti zavedení racionálních čísel a podobně hledání řešení k mocnění vedlo k jejich rozšíření o iracionální čísla. Komplexní čísla jsou odpovědí na to, že pro některé typy rovnic to stále nestačilo. Ale ví se, že v algebře s komplexními čísly toto už nenastane a komplexní algebra se někdy proto nazývá algebraický uzávěr.

Přirozeně se zavádí geometrický pohled na komplexní číslo jako bod v rovině, což zavedl Gauss a po něm se někdy říká Gaussova rovina.



Je ale celkem přirozené zkusit reprezentovat komplexní číslo v jiných souřadnicích a vyzkoušet, jaké bude mít vlastnosti. Polární souřadnice:

$$z = (x, y) = x + jy = |z| (\cos\alpha + j \sin\alpha)$$

Hned se ovšem zjistilo, že násobení reprezentuje otáčení o úhel α, v celočíselných násobcích lze například úplnou indukcí dokázat Moivreovu větu

$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) .$$

Podobně jako u zobecňování celočíselných mocnin na neceločíselné a záporné mocniny lze přechozí vztah zobecnit v rámci konečné algebry (ve smyslu konečného počtu operací, ne nekonečných množin) i na záporné a racionální mocniny. Také pak dostaneme vztahy na dělení a násobení v goniometrickém tvaru:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta)) .$$

Stačí si ale všimnout, že při násobení je u argumentu stejná algebra jako u počítání s mocnimani,

$$a^b a^c = a^{b+c}$$

a naskytla se otázka, jestli tedy nepůjde zapsat komplexní číslo jako výraz, ve kterém argument figuruje jako mocnina. Na konečné algebře toto již nelze provést (ono ale již zobecnění Moivreovy věty na iracionální mocniny také ne, to je zde skrytá zkratka, i když jejímu zobecnění na reálná čísla snadno uvěříme) ale lze to pomocí nekonečných řad. S nekonečným mocninným rozvojem

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

je konzistentní (na komplexní algebře) zavést $z = x + jy = |z| \, \mathrm{e}^{j\alpha}$.

Výhoda: Algebra při počítání s mocninami je stejná jako s reálnými čísly, pouze v exponentech máme čísla komplexní. Netřeba si nyní pamatovat Moivreovu větu, vztahy pro násobení a dělení v goniometrickém tvaru, stačí počítat s mocninami stejně, jak jsme byli zvyklí v oboru čísel reálných.

Všechny "složitější" funkce (ve smyslu nikoliv "konečně algebraické", jako je třeba odmocnina) lze pak zavést i pro komplexní argument pomocí mocninných řad, například

$$\cos z = \cos(x + jy) = 1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

Je to kvivalentní vzorci $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz}}{2}$,kde jsou nekonečné řady skryty v exp. funkcích.

Funkce v komplexním oboru již nemusí být funkce, ač se jim tak i nadále říká

Demonstrujeme na odmocnině, kde navíc jev, který chceme ukázat, je již známý z řešení kvadratické rovnice jako speciální případ druhé odmocniny.

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{cases}$$

Komplexní odmocnina nemá jednoznačný výsledek, není to již funkce, je to relace. Zápis vlevo lze chápat i jako množinu obsahující všechna čísla vpravo. Všechna totiž umocněná na n dají původní číslo z.

To je výhoda, v komplexním oboru můžeme pracovat s inverzním "funkcemi" (nejde totiž o funkce, i když se jim tak v mnohých učebnicích říká, snad proto, protože vypdají stejně a všichni jsou na to zvyklí), které existují vždycky, jen nejsou jednoznačné. Chápat je lze jako všechna řešení rovnice s původní funkcí.

$z_i^n = z \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$ je inverzní vztah k odmocnině výše. Nejednoznačnost odmocniny nevadí.

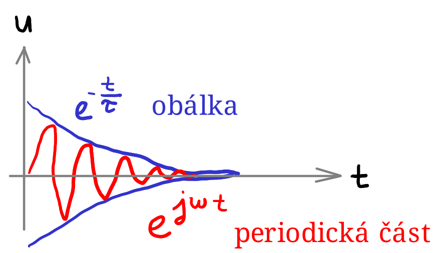
Toto je však známo ze středoškolské matematiky, kde se při řešení rovnic při odmocňování zavádělo pravidlo, že se před odmnocninu připisoval znak ±. Je to stejný jev z komplexní algebry, jen speciálně pro druhou odmocninu byly obě větve odmocniny reálná čísla s opačnými znaménky.

V komplexní algebře mají všechny inverzní úlohy řešení, například algebraická rovnice stupně n má právě n řešení. Ve fyzice i v elektrotechnice mnohdy s komplexními řešeními pracujeme a interpretujeme je jako reálné jevy. Vyjde-li například v nějakém řešení komplexní frekvence, její imaginární část dá v exponenciálním tvaru harmonického řešení reálnou část a tu interpretujeme jako časově závislou amplitudu, která tvoří obálku kmitů. Samozřejmě, že je možné nalézt řešení i v oboru reálném ale není to tak elegantní, máme víc rovnic a víc neznámých a složitější zápis.

$$U(t) = \underbrace{U_0 e^{j\varphi}}_{\hat{U}\ \text{fázor}} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{j\omega t} = \underbrace{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{U(t)\ \text{obálka}} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

obsahuje informaci o amplitudě i fázi

reálná složka exponentu, neperiodická část řešení



Podobně máme zobecnění Ohmova zákona, které formálně vypadá stejně jako pro případ obvodu s reálnou zátěží, komplexní impedance v sobě však obsahuje informace o indukčnosti a kapacitě a komplexní napětí a proud (fázory napětí a proudu) obsahují informaci o amplitudě i o fázi.

$\hat{I} = \hat{U}\hat{Z}$, Ohmův zákon v komplexním tvaru, $\hat{Z}$ je komplexní impedance, $\hat{I}$, $\hat{U}$ jsou fázory proudu a napětí.

Další příklady:

$u(\mathbf{r}, t) = u_0 \mathrm{e}^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi)}$ je rovinná vlna, položíme-li fázi, tj. výraz uvnitř závorky v exponentu konstantě, dostaneme rovnici roviny ax + by + cz + d = 0.

Dobrý den, chtěl bych se zeptat na postup sestavování rovnice přímky (příklady 4 a 5)

4. Napište rovnici přímky, která prochází bodem (1, 2) a má směrnici 1/3.

Vhodný je tvar přímky v parametrickém tvaru:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_x + s_x t \\ y &= A_y + s_y t \end{aligned}\right\} \quad \vec{X} = A + \vec{s}\, t$$

$$k = \frac{1}{3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\vec{s} = (\Delta x, \Delta y) = (3, 1)$$

jedno volíme,
druhé dopočítáme,
$\Delta y = k \Delta x$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3t \\ y &= 2 + t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &t = y - 2 \\ &x = 1 + 3(y-2) \\ &\boxed{x - 3y + 5 = 0} \end{aligned}$$

5. Napište rovnici přímky, která prochází bodem (1, 3) a (2, 5).

Zadáno A, B. Volíme $\vec{s} = B - A = (2,5) - (1,3) = (1,2)$
Ostatní stejné jako 4.

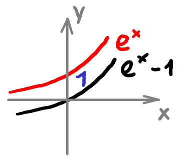
$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y = 3 + 2x - 2 \\ &y = 2x + 1 \\ &\boxed{2x - y + 1 = 0} \end{aligned}$$

Potřeboval bych lépe vysvětlit příklad číslo 11

Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

Tabulkové limity: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1.$

11. je ale jednodušší, typu $\dfrac{K}{\infty} \longrightarrow \pm\infty$



$\dfrac{e^x}{e^x-1} \longrightarrow -\infty$

Čitatel je kladné číslo, jmenovatel jde k nule a je záporný.

Vypočítejte limity v hraničních bodech množiny M:

$$f(x) = \left(\ln\frac{2x+1}{x}\right)^{\cos(\pi x)}, \quad M = \mathrm{D(f)}$$

D(f):

- $x \neq 0$
- $\frac{2x+1}{x} > 0 \rightarrow$
  - $x > 0$: $2x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \rightarrow x > 0$
  - $x < 0$: $2x+1 < 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2} \rightarrow x < -\frac{1}{2}$
- $\ln\frac{2x+1}{x} > 0$ Základ exponenciální funkce musí být > 0 $\rightarrow \frac{2x+1}{x} > 1$
  - $x > 0$: $2x+1 > x \rightarrow x > 0 \wedge x > -1 \rightarrow x > 0$
  - $x < 0$: $2x+1 < x \rightarrow x < 0 \wedge x < -1 \rightarrow x < -1$

Všechny čtyři podmínky musí být splněny zároveň a dostaneme: $D(f) = (-\infty,-1) \cup (0,\infty) = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 0 \rangle$

Jsou to tedy 4 příklady v jednom, hraniční body M jsou +∞ -∞, -1, 0+.

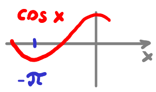
$$\lim_{x\to x_0}\left(\ln\frac{2x+1}{x}\right)^{\cos \pi x} \underset{a = e^{\ln a}}{=} \lim_{x\to x_0} e^{\ln\ln\frac{2x+1}{x}\cdot\cos\pi x} \underset{\text{věta o limitě složené funkce}}{=} e^{\lim_{x\to x_0}\ln\ln\frac{2x+1}{x}\cdot\cos\pi x} = L(x_0)$$

Úlohu jsme tedy převedli na výpočet limity v exponentu. Zkoušíme nejprve dosadit:

a) $\pm\infty$: $\frac{2x+1}{x} \rightarrow 2$; $\ln\ln\frac{2x+1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \ln\ln 2$, $\cos\pi x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{}$ Limita neexistuje, druhá funkce osciluje, první se blíží konstantě.

b) 0^+: $\frac{2x+1}{x} \rightarrow +\infty$, $\ln\ln\frac{2x+1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, $\cos\pi x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$; exponent → +∞, tedy L(0+) = +∞

c) -1^-: $\frac{2x+1}{x} \rightarrow 1^+$, $\ln\frac{2x+1}{x} \rightarrow 0^+$, $\ln\ln\frac{2x+1}{x} \rightarrow -\infty$



$\cos\pi x \xrightarrow[x\to -1]{} -1$

tedy $\lim_{x\to -1^+}\ln\ln\frac{2x+1}{x}\cdot\cos\pi x = +\infty$, tedy L(-1) = +∞.

Funkci lze zobrazit například ve Wolfram Alpha,
https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28log%28%282+x+%2B+1%29%2F%28x%29%29%29%5Ecos%28Pi+x%29

Tato úloha byla dost těžká i pro mě, nejen výpočtem limit samotných ale už i při určování definičního oboru. Pokud máme exponenciální funkci a základ je funkcí proměnné, nikoliv konstanta, musíme přidat daší podmínku a sice že základ je nezáporný.

Například $f(x) = x^x$, $\mathrm{D}(f) = (0, \infty)$.

Demonstrace, že to tak je: kdybychom totiž definiční obor neomezili, mohl by argument v logaritmu $x^x = \mathrm{e}^{\ln x}$ nabývat záporných hodnot. Promyslete si, že základ nemůže být obecně ani nula.

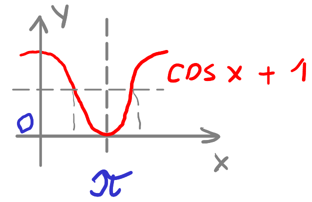
Já bych se chtěl zeptat na jeden příklad s kterým si nevím rady, ale není z tohoto PDFka

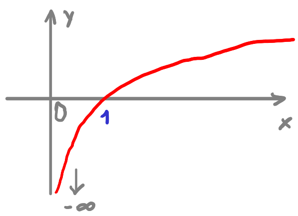
$$\lim_{x\to\pi} \underbrace{\ln^2 \underbrace{(1+\cos x)}_{\to 0}}_{\to(-\infty)^2} = \left(\lim_{x\to\pi} \ln(1+\cos x)\right)^2 = \infty$$

věta
o limitě
složené
funkce

$\cos x$ má v π lok. minimum,

$1+\cos x \geq 0$, $1+\cos x \leq 0$ v okolí π





Symbolická algebra s nevlastními čísly:

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$K\infty = \infty$

$\frac{\infty}{0^\pm} = \pm\infty$

$\frac{K}{0^\pm} = \pm\infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty^n = \infty$

$\infty^\infty = \infty$

$\frac{K}{\pm\infty} = 0$

$\frac{\pm\infty}{K} = \pm\infty \quad K>0$

"neurčité" výrazy:

$\infty - \infty$

$0 \cdot \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{x}{x} \quad \frac{x^2}{x} \quad \frac{x}{2x^2-1}$

$\frac{\infty}{\infty}$

0^0

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \infty$$

$$x^x = e^{x\ln x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^n = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln x}$$