Doplňková matematika

Učební materiály k semináři Doplňková matematika.

Autoři:

- doc. Mgr. Petr Habala, Ph.D.: *zadání a ukázkové řešení (rok asi 2010).*
- Ing. Martin Žáček, Ph.D.: *revize, úvod, odpovědi na dotazy, editace.*

Úvod:

Zadání příkladů a jejich řešení napsal, někdy kolem roku 2010 se vznikem semináře, doc Habala z katedry matematiky ČVUT FEL. Opravami všech nalezených chyb (od roku 2023 přímo do dokumentu) a odpověďmi na dotazy studentů (nejen) z roku 2020, kdy výuka probíhala v koronavirovém režimu, doplnil a zeditoval do jediného dokumentu *Martin Žáček, zacekm@fel.cvut.cz.*

Matematický seminář: Pracovní list # 1

Příklady vypracujte samostatně, výsledky se dozvíte na konci hodiny.
V případě problémů se přihlaste, vyučující vám pomůže.

1. Zjednodušte co nejvíce $\dfrac{\frac{b}{\frac{d}{a}+13d}}{\frac{1}{d}} - \dfrac{b}{13}$.

2. Zjednodušte co nejvíce $\dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{8}{(x+2)x}$.

3. Zjednodušte co nejvíce $\sqrt{1+y} - \sqrt{\dfrac{x+y}{1+\frac{x}{y}}}$.

4. Aniž byste zadaný příklad přesně spočítali, odhadněte, který z nabízených výsledků je nejblíže tomu správnému.

$405 \cdot 599$:	a) 24000	b) 200000	c) 240000	d) 23000.
$\frac{30}{1600000}$:	a) 0.00002	b) 0.002	c) 0.00007	d) 0.2.
199^3:	a) 80000	b) 6000000	c) 8000000	d) 6000.
$\frac{30}{-0.00016}$:	a) 200000	b) 300000	c) -200000	d) -30000.

5. Vypočítejte kořeny kvadratické rovnice $p^2 + 250p + 10^4 = 0$.

6. Kvadratický polynom $5p^2 - 5000p - 10^7$ vyjádřete jako součin kořenových činitelů.

7. Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2-4} + e^x$.
Výsledek zapište pomocí intervalů, třeba $D(f) = (1,3) \cup (3,\infty)$.

8. Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x-3} + \sqrt{7-x}$.
Výsledek zapište pomocí intervalů.

9. Nakreslete graf funkce $f(x) = \ln(x-2)$.

10. Nakreslete graf funkce $f(x) = 3\sin(x)$.

11. Vyřešte rovnici $e^{x-2} = 1$.

12. Vyřešte rovnici $\ln(x^2-3) = 0$.

13. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{\sqrt{3+x}}{x-1}\right)$.

14. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2-13}\right)$.

15. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{e^x}{2x-4}\right)$.

Matematický seminář: Pracovní list # 1 řešení

1. $\dfrac{b}{\frac{1}{a}+13}-\dfrac{b}{13}$ nebo $\dfrac{ab}{1+13a}-\dfrac{b}{13}$ nebo $\dfrac{-b}{13(1+13a)}$.

2. Správná odpověď je až ten poslední výraz ve výpočtu
$\dfrac{x^3-4x}{(x+2)x}=\dfrac{x(x^2-4)}{(x+2)x}=\dfrac{x^2-4}{x+2}=x-2.$

3. Správná odpověď je ten poslední výraz ve výpočtu
$\sqrt{1+y}-\sqrt{\dfrac{(x+y)y}{y+x}}=\sqrt{1+y}-\sqrt{y}.$

4. $405\cdot 599\sim 400\cdot 600=240000$, tedy c).
$\frac{30}{1600000}=\frac{30}{16}\cdot\frac{1}{100000}\sim 2\cdot 10^{-5}$, tedy a).
$199^3\sim 200^3=8\cdot 10^6$, tedy c).
$\frac{30}{-0.00016}=\frac{-30}{0.00016}\cdot\frac{100000}{100000}=\frac{-30}{16}\cdot 10^5\sim -2\cdot 10^5$, tedy c).

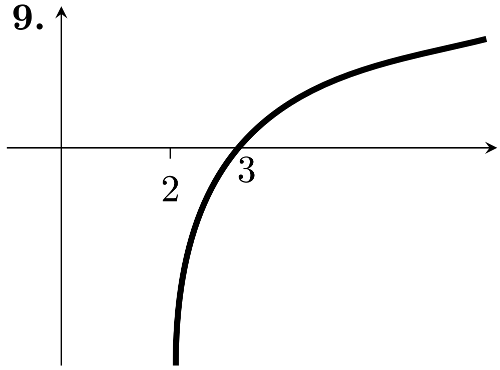
5. $D=\sqrt{25^2\cdot 10^2-4\cdot 1\cdot 10^4}=\sqrt{62500-40000}=\sqrt{22500}=150$, proto $\frac{1}{2}(-250+150)=-50$, $\frac{1}{2}(-250-150)=-200$.

6. $x_{1,2}=\frac{1}{2\cdot 5}(5000\pm\sqrt{225\cdot 10^6})$, $5\cdot(x-2000)(x+1000)$.

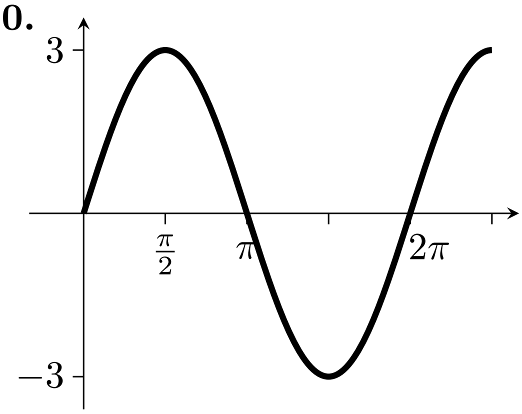
7. $D(f)=(-1,2)\cup(2,\infty)$.

8. $D(f)=(-\infty,3)\cup(3,7\rangle$.

9.



10.



11. $x-2=0\implies x=2$.

12. $x^2-3=1\implies x=\pm 2$.

13. $x\to 1^+$ znamená $(x-1)\to 0^+$, proto $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{3+x}}{x-1}\right)\overset{\frac{\sqrt{4}}{0^+}}{=\!=}\infty$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x^2-13}\right)\overset{\frac{1+0}{\infty}}{=\!=}0$.

15. $x\to 2^-$ znamená $(2x-4)\to 0^-$, proto $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{e^x}{2x-4}\right)\overset{\frac{e^2}{0^-}}{=\!=}-\infty$.

Prosim, muzeme probrat priklad cislo 3?

Zjednodušte co nejvíce $\sqrt{1+y} - \sqrt{\frac{x+y}{1+\frac{x}{y}}}$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}(y+x)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y}(y+x)}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{x+1}}$$

použili jsme

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{a}$$

$a^m b^m = (ab)^m$ kde m = 1/2

$$\sqrt{1+y} - \sqrt{y}\sqrt{\frac{\cancel{x+y}}{\cancel{x+y}}} =$$

$$= \sqrt{1+y} - \sqrt{y}$$

Krátit můžeme jen nenulovým výrazem,
k výsledku je třeba dodat podmínky

$$x+y \neq 0 \,, \quad y \neq 0$$

Tu druhou proto protože y bylo původně ve jmenovateli a úpravami jsme je převedli do čitatele.

$$\frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

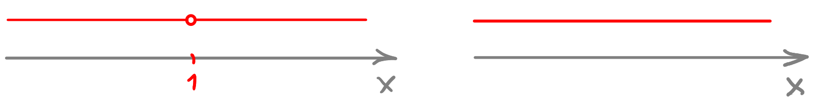
Rovnost platí s výjimkou kdy $y = 0$, což je zde zjevné, neboť napravo lze nulu dosadit, kdežto nalevo nelze. Formálně jsme od výrazu vlevo přešli k výrazu vpravo rozšířením hlavního zlomku o člen y, neboli jeho přidáním do čitatele i jmenovatele, což je ekvivalent vynásobením výrazu jedničkou ve tvaru y/y. Takový výraz je ale nikoliv "jednička" ale "skoro jednička". Je totiž roven jedné s výjimkou bodu $y = 0$. Po rozšíření musíme navíc provést jedno krácení výrazem y.

Poznámka ke krácení (k příkladům 1 až 3):

Výrazy, které se dají zkrátit, máme naučeno je automaticky vykrátit ale je třeba si při tom vždy uvědomit, že pokud je krácený člen neznámá, je upravovaný výraz funkce a my tu funkci měníme. Před krácením není funkce v některých bodech definována a krácením funkci v těchto bodech dodefinujeme. Příklad:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ \text{nedef} & x = 1 \end{cases} \qquad f(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$$



Krácením tedy změníme funkci, poslední rovnítko obecně neplatí. Platí sice skoro ve všech bodech funkce ale ne ve všech. A nevíte, jestli zrovna u Vašeho výpočtu ten jeden bod nebude fatální, může kvůli němu havarovat družice.

Tomu se vyhneme přidáním podmínky, že výraz, kterým se krátilo, je nenulový.

Zde jsme krácením dodefinovali odstranitelný singulární bod. To je takový bod nespojitosti, v němž se limita zleva rovná limitě zprava a v samotném bodě funkce není definována.

Pravidlo při úpravách výrazů:

Krátit (zlomek, v rovnici ekvivalent násobení či dělení levé a pravé strany) můžeme pouze nenulovým výrazem. Krátíme-li výrazem s neznámou, je nutno přidat k výrazu po vykrácení podmínku, že krácený člen je různý od nuly. Pouze v takovém případě krácením neměníte výraz, případně řešení rovnice.

Mohl bych poprosit o krátké vysvětlení, jak přemýšlet nad 4b a 4d?

Aniž byste zadaný příklad přesně spočítali, odhadněte, který z nabízených výsledků je nejblíže tomu správnému:

$\frac{30}{-0.00016}$: a) 200 000 b) 300 000 c) -200 000 d) -30 000

$$\frac{30}{-0.00016} \approx \frac{\overset{2}{\cancel{30}}}{-0.000\underset{1}{\cancel{15}}} = -\frac{2}{10^{-5}} = -2\cdot 10^{5}$$

Tyto kroky lze však provést zpaměti. 4a) a 4b) lze vyloučit okamžitě bez počtání, chybí záporné znaménko , d) vyloučíme, protože při krácení zaokrouhleným jmenovatelem na 0. ...15 musí být platné místo blízké 2 a pak jen stačí zkontrolovat řád. Pokud víte, že jedna odpověď je správná a nemáte čas (třeba v písemce), ani to dělat nemusíte a odpověď jste našel rychlejším vyloučením nesprávných odpovědí.

Kořenoví činitelé, příklad 6:

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a\,\underbrace{(x-x_1)}_{\text{kořenový činitel}}\cdot(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Lze také chápat jako alternativní vyjádření polynomu ve tvaru, kde jsou explicitně vyjádřené kořeny.

zde kořeny mohou být stejné a/nebo komplexní

příklad: $x^2+1 = (x+j)(x-j)$

$$\underbrace{x^2+px+q}_{\text{ireducibilní polynom}} \qquad D = p^2-4q < 0$$

K příkladům 5 a 6, jak nalézt kořeny alternativně metodou přímého rozkladu

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{b}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+px+q\right) = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2+\underbrace{(-x_1-x_2)}_{p}x+\underbrace{x_1x_2}_{q})$$

vytknutí a — jiné označení — součin kořenových činitelů — roznásobení

Porovnáním dostaneme:

$$\begin{cases} p = -x_1 - x_2 \\ q = x_1 x_2 \end{cases}$$

Pro jednoduché celočíselné kořeny lze často řešit zpaměti.

Triviální příklad: $(x-2)(x+3) = x^1 + x \underbrace{- 6}$

$|q| = 6 = 1\cdot 2\cdot 3$

$6 = 1\cdot 6 = 2\cdot 3$

$\pm 1 \quad \pm 6$

$\pm 2 \quad \pm 3$

		p
+1	−6	5
−1	+6	−5
$\boxed{+2 \quad -3}$		+1 ✓ řešení
−2	+3	−1

$$p^2 + \underbrace{250}_{-p_1-p_2}p + \underbrace{10\,000}_{p_1 p_2}$$

$p_1, p_2 \approx \sqrt{10\,000} = 100$

zkusíme $p_1 = -50$ ✓

$p_2 = \frac{10000}{50} = -200$ ✓

U takhle velkých celočíselných kořenů je řešení přímým rozkladem atypické ale v tomto případě ještě použitelné, protože kořeny jsou jednoduché, zaokrouhlené na celé padesátky. Pokud by byly kořeny stále celočíselné ale komplikovanější, například 48 a 82, bylo by příliš mnoho možností, jak rozložit člen p = 3 936 a schůdnější cesta by byla přes přímý vzorec.

Já bych se v chtěl zeptat jestli byste pak mohl vysvětlit Hornerovo schéma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$x\,\underbrace{(a_n x^{n-1} + \dots + a_1)} + a_2$$

je opět polynom ale nižšího stupně, dále rekurentně, dostaneme

$$a_n x(x(\dots x\underbrace{(a_n x + a_{n-1})} + a_{n-1}\ ) + \ \dots)$$

Tímto členem začneme, výsledek je nový koeficient a podobný tvar v další závorce.

Příklad: $2x^5 - x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x - 1$ chceme P(2):

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & & 4 & 6 & 22 & 42 & 88 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 21 & 44 & 87 \end{array} \qquad P(2) = 87$$

opíše se

Postup:
1. Nejvyšší koeficinet opíšeme, zde člen 2
2. Číslo na třetím řádku vynásobíme zadaným argumentem (zde 2) a opíšeme do následujícího sloupce na druhý řádek.
3. Sečteme hodnoty 1. a 2. řádku.
4. 2. a 3. opakujeme pro všechny koeficienty.

Hornerovo schema můžete také využít k dělení kořenovým činitelem:

částečný podíl

zbytek

$$\frac{P_n}{x - x_1} = Q_{n-1} + \frac{z}{x - x_1}$$

$$\frac{2x^5 - x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x - 1}{x - 2} = \overbrace{2x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 21x + 44} + \frac{87}{x - 2}$$

Klasické dělení je oproti Hornerově schematu mnohem pracnější, funguje však obecněji, Hornerovým schematem lze dělit pouze v případě, kdy dělitel je ve tvaru kořenového činitele.

$$(2x^5 - x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x - 1) : (x - 2) = 2x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 21x + 44 + \frac{87}{x-2}$$

$$\begin{array}{l}
-(2x^5 - 4x^4) \\ \hline
\quad 3x^4 \\
\quad -(3x^4 - 6x^3) \\ \hline
\qquad 11x^3 \\
\qquad -(11x^3 - 22x^2) \\ \hline
\qquad\quad -(21x^2 - 42x) \\ \hline
\qquad\qquad 44x \\
\qquad\qquad -(44x - 88) \\ \hline
\qquad\qquad\quad 87
\end{array}$$

Hornerovo schema se dobře programuje, je to opakující se cykl se dvěma operacemi (vynásobení x a přičtení dalšího koeficientu). Také snižuje počet operací (bereme-li celočíselnou mocninu jako několik operací násobení) a snižuje zaokrouhlovací chyby způsobené odečítáním blízkých čísel.

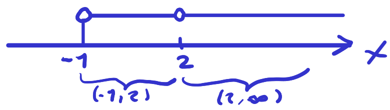
Příklad 7 $\quad f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2-4} + e^x, \ \mathrm{D}(f) = ?$

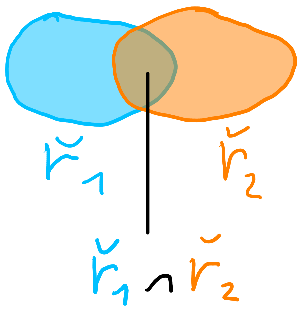
$\ln(x) \qquad x > 0$

$\dfrac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$$\underbrace{x > -1 \qquad x \neq \pm\sqrt{4} = \pm 2}_{\langle -1,\infty) \setminus \{2\} = (-1,2) \cup (2,\infty)}$$

$\left.\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right\}$ musí platit současně





Mohl bych se zeptat na řešení definičního oboru osmého cvičení?

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x-3} + \sqrt{7-x}, \ \mathrm{D}(f) = ?$$

Obecně (sinus, dělení, odmocňování):

$\sin(x) \qquad \mathrm{D}(\sin) = \mathbb{R}$

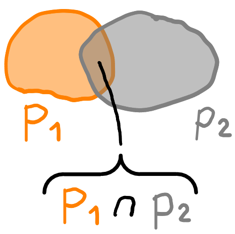
$\dfrac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$\sqrt{x} \qquad x \geq 0$

Konkrétně ze zadané funkce plyne:

- $x - 3 \neq 0$
- $7 - x \geq 0$

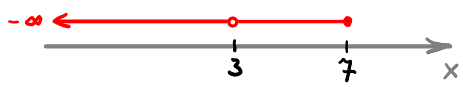
Máme-li více podmínek, výsledný definiční obor musí splňovat všechny současně.
Množinově je to průnik, každá z podmínek definuje množinu takových x, která ji splňují.



$x \neq 3$

$-x \geq -7 \quad \rightarrow \quad x \leq 7$

$(-\infty, 7\rangle \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, 7\rangle$

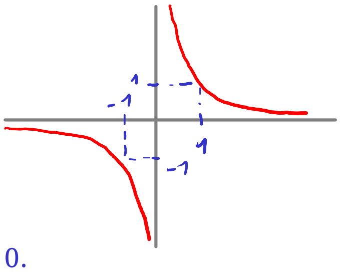


Řešení můžeme napsat buď jako sjenocení dvou intervalů
nebo jako jediný interval, z něhož vyjmeme množinovým odečtením
jeden bod.

já bych se jenom zeptal (kohokoliv z kolegů, kdo by věděl), zda máte nějaký univerzální návod na výpočty limit funkcí (poslední tři příklady)... ani pohledem na řešení mi to moc nejde do hlavy, jak si ty výrazy upravit nebo co s nimi

Dnešní limity se odvíjejí od základní limity s nulou nebo nekonečnem ve jmenovateli:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Modifikace:

$\frac{K}{x}$ K je konstanta nebo omezená funkce, buď všude (sin(x)) nebo do ní lze dosadit x = 0.

$\frac{1}{f(x)}$ kde f(0) = 0

příklady:

$$\underbrace{\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}} \qquad \underbrace{\lim \frac{1}{x^2}} \qquad \underbrace{\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sin x}}$$

lze převést na předchozí substitucí y = x - 1

V okolí bodu π se sinus chová jako funkce π - x.

Za jmenovatel lze dosadit substituci a řešit jako limitu v 0+ v nové proměnné.