Přípravný kurz matematiky 2020
úvodní informace

https://mfkurz.fel.cvut.cz/ … www stránky kurzu
http://aldebaran.cz/~zacek/ ... tato prezentace

Rozsah: 10×1.5 hodiny = 15 hodin
Vyučující:
Martin Žáček
E-mail na vašeho vyučujícího: zacekm@fel.cvut.cz

Náplň:
- rovnice a nerovnice
- elementární funkce a jejich vlastnosti
- posloupnosti – limita posloupnosti
- analytická geometrie
- komplexní čísla
- diferenciální a integrální počet

Literatura:
- *skripta M. Hyánková, V. Sedláčková: Matematicko-fyzikální seminář. Matematika* (http://math.feld.cvut.cz/0educ/priprava/) ve skriptech však není integrální a diferenciální počet, je v nich zase kombinatorika, která se v tomto kurzu nebude probírat

Elementární funkce a jejich vlastnosti

Obsah tématu:

- Úpravy algebraických výrazů.
- Matematické symboly, operace s výroky.
- Funkce a jejich obecné vlastnosti.
- Lineární funkce.
- Kvadratická funkce.
- Lineární lomená funkce.
- Mocninná funkce.
- Logaritmická funkce, logaritmus a jeho využití.
- Goniometrická funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, součtové vzorce.

  (toto všechno by měly vyplnit asi 3 dvouhodinovky)

Úpravy algebraických výrazů

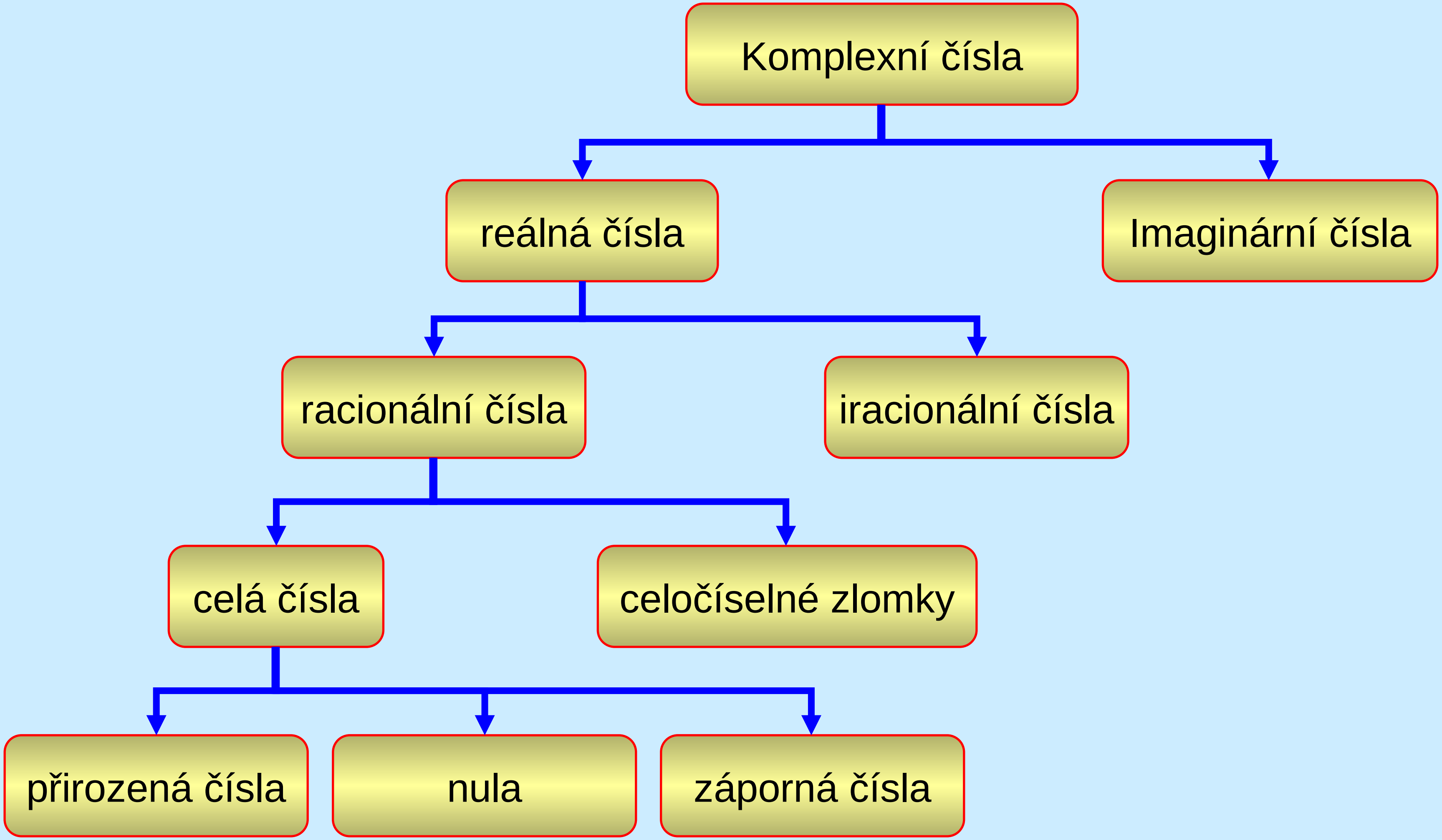
Objekty, s nimiž v pracujeme (podle historického vývoje):

věci → přirozená čísla → celá čísla → racionální čísla → reálná čísla

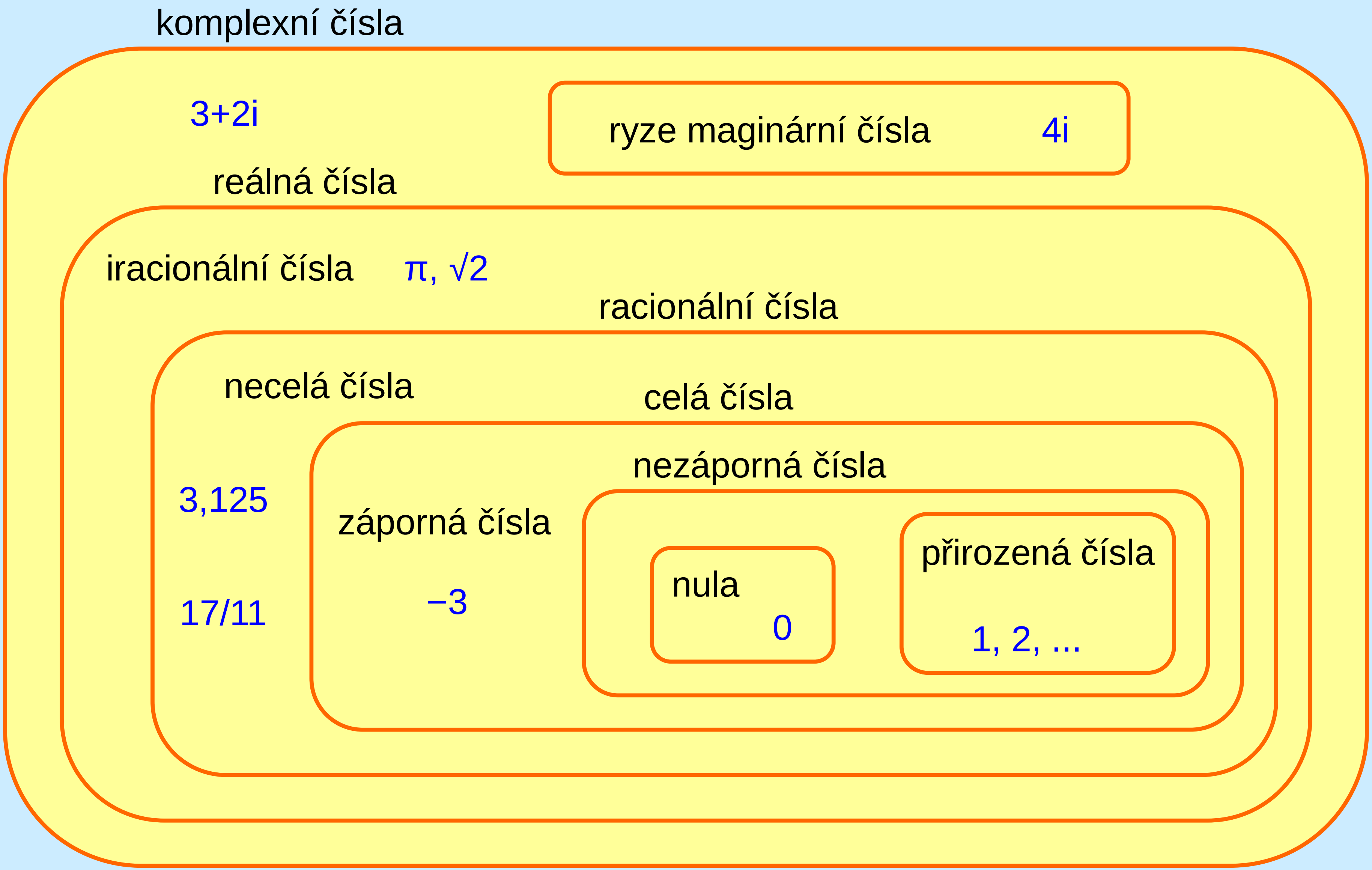
Každý krok ve zobecnění vychází z nějaké nové operace, která si vynutí zavedení obecnější množiny čísel. Je mnoho kroků v dalším zobecňování, komplexní čísla, počítání se symboly pro čísla ap.

operace	inverzní operace	důsledek pro množinu čísel
sčítání	**odčítání**	nutnost zavést záporná čísla a nulu, aby bylo definováno odečítání stejných čísel a větších čísel od menších
↓ (opakovaným použitím)		
násobení	**dělení**	nutnost zavést racionální čísla, jinak by nebyl obecně definován podíl celých čísel
↓ (opakovaným použitím)		
mocnění	**odmocňování**	nutnost zavést iracionální čísla, jinak by nebyla obecně definována odmocnina, k odmocnině záporného čísla viz později komplexní čísla

S jakými čísly pracujeme (řazeno hierarchicky)



S jakými čísly pracujeme (řazeno množinově)



Mocnina

$y = x^n$ … celočíselná mocnina … $= x.x \ldots x$ n *krát pronásobené* x

evidentně platí $x^m x^n = x^{m+n}$ a platí také $(x^m)^n = x^{m.n}$

(díky prvnímu vztahu můžeme zavést zápornou mocninu, zvolíme-li $n = -m$

a dostaneme $x^m x^{-m} = x^{m-m} = x^0 = 1$ *a tedy* $x^{-m} = 1/x^m$)

... chceme inverzní funkci: lze umocnit levou a pravou stranu $1/n$?

$y^{1/n} = (x^n)^{1/n} = x^{n.1/n} = x^{n/n} = x^1 = x$

zavedli jsme tak **odmocninu**, jako inverzní operaci k mocnině

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = y \Leftrightarrow x = y^n$

Mocninu s racionálním exponentem $a = m/n$ zavedeme jako

$x^a = x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$ kde obecně musí být $x \geq 0$.

Úpravy algebraických výrazů

Co je to algebra?

Je to část matematiky, v níž je určeno **s jakými** objekty pracujeme (množina) a **jak** s nimi pracujeme (operece + jejich vlastnosti).

Například algebra s reálnými čísly a s operacemi „+“ a „·“.

Co je to výraz?

Je to číselné nebo symbolické vyjádření matematických operací, ze kterého poznáme, jaké operace, v jakém pořadí a na jakých objektech máme provést, abychom získali výsledek.

Nutno si nacvičit a zafixovat různá pravidla, matematická (komutativita, asociativita, …) nebo konvenční, týkající se jen zápisu (různé zápisy téže operace, $ab = a.b = a \cdot b = a \times b$, zlomky, priorita operátorů, závorky, …).

Matematika by se dala přirovnat k jazyku, kde množina, se kterou pracujeme, představuje slova, operace se svými vlastnostmi odpovídají gramatickým pravidlům, jak můžeme slova skloňovat a řadit do vět a konvence zápisu výrazů odpovídá pravopisu.

Polynomy a operace s nimi

Polynom (mnohočlen) je obecný výraz typu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \,.$$

n … stupeň polynomu, $a_n \neq 0$

a_i … koeficienty,

x … proměnná.

S polynomy můžeme provádět řadu operací, lze je **sčítat**, **odčítat**, **násobit**, **dělit**, při dělení polynomů však již nemusí být výsledkem polynom.

- polynom jako funkce nebo jako výraz,
- kořeny polynomu, algebraické rovnice,
- operace s polynomy (sčítání, násobení, a k nim inverzní operace.

- Speciálně: dělení polynomů (početní postup)
- Speciálně: podíl dvou polynomů (jako racionální lomená funkce)
- Speciálně: kvadratický polynom (doplnění na úplný čtverec, vzorec pro kořeny)

Funkce a jejich vlastnosti (obecné)

Pojem funkce:

$y = \mathrm{f}(x)$, reálná funkce (jedné) reálné proměnné,

přiřazuje jednoznačně hodnotu y hodnotě x

- definiční obor D_f (*množina všech x, pro které existuje obraz*)
- obor funkčních hodnot H_f (*množina všech y, které jsou obrazem nějakého* x)

Vlastnosti:

- rostoucí $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) < \mathrm{f}(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in D_\mathrm{f}$
- klesající $>$
- nerostoucí $\geq$
- neklesající $\leq$
- prostá (vzájemně jednoznačné přiřazení $x <\!-\!> y$, existuje **inverzní funkce**)

… (*uvedené vlastnosti mohou platit jen na nějakém intervalu*)

- sudá (*má symetrický graf podle osy y*) $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-x) \ \forall x \in D_\mathrm{f}$
- lichá (*má symetrický graf podle počátku*) $\mathrm{f}(x) = -\mathrm{f}(-x) \ \forall x \in D_\mathrm{f}$

Graf funkce

Příklady funkcí (konstantní, lineární, kvadratická, lineární lomená, …)

Prostá funkce

Funkce $\mathrm{f}(x)$ je **prostá**, platí-li:

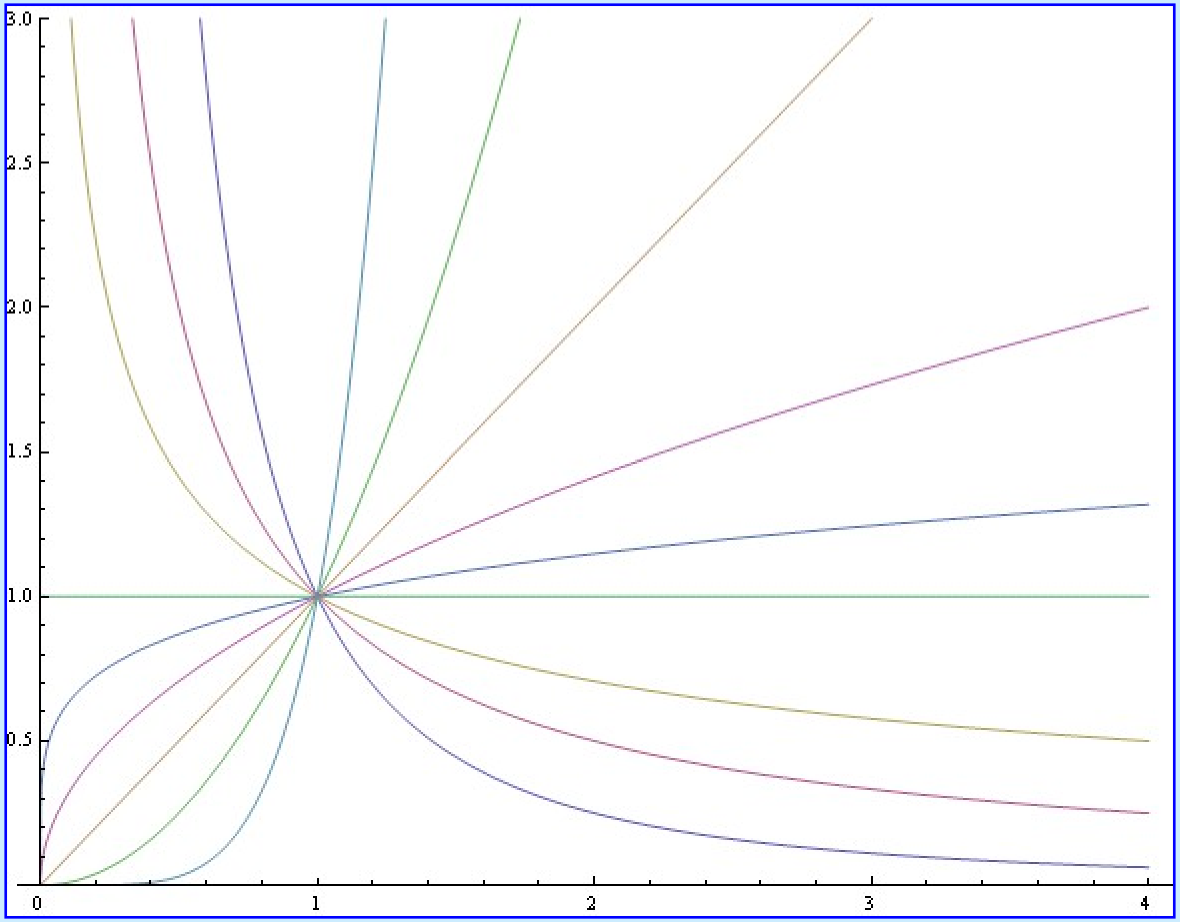
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) \neq \mathrm{f}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D_\mathrm{f} \quad .$$

Prostá funkce tedy nikdy nepřiřazuje dvěma různým bodům tentýž bod.
Někdy funkce nemusí být prostá na celém definičním oboru, může být však prostá na nějaké podmnožině z definičního oboru. Například funkce x^2 není prostá ale na podintervalech celé množiny reálných čísel, kdy $x < 0$ nebo $x >= 0$ je prostá.

Je-li $\mathrm{f}(x)$ prostá funkce, existuje k ní funkce inverzní $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

Mocninná funkce

$$f(x) = x^a, \quad x \geq 0, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$



a = −2; −1; −0,5; 0; 0,2; 0,5; 1; 2; 5

Poznáte, který koeficient náleží které křivce?

Exponenciální funkce

Zavede se podobně jako mocninná funkce, kterou už známe, proměnná však bude v exponentu:

$$\mathrm{f}(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 0$$

… exponenciální funkce se základem a.

Eulerovo číslo: získáme když připisujeme úrok x za nějaké období n krát.

Na konci období budeme mít na účtu $(1 + x/n)^n$ korun a pro rostoucí n do nekonečna, tj. jakoby se úročilo neustále, dostaneme právě Eulerovo číslo (při počátečním vkladu 1 Kč a úroku 1, tj. 100 %).

***e* = 2,718281828459**…. (jde o iracionální číslo)

Zavedeme $\mathrm{f}(x) = e^x$ … exponenciální funkce o základu e

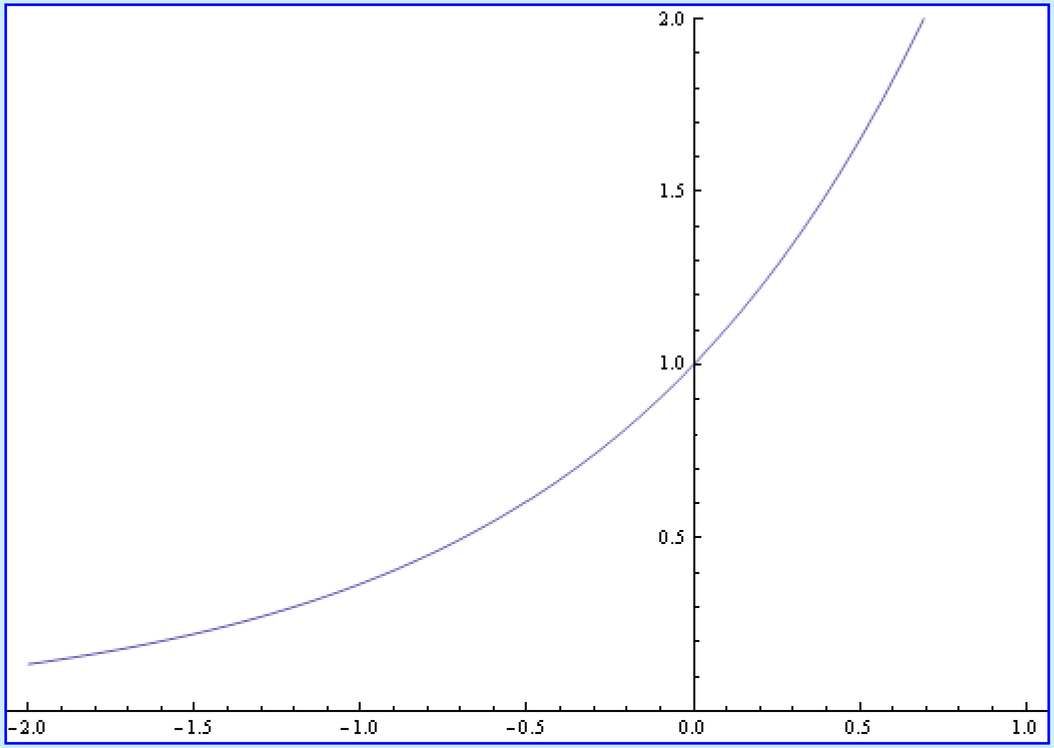
… má obzvlášť hezké vlastnosti, například:

- směrnice tečny v bodě x = 0 je rovna 1,

- derivováním dostaneme tutéž funkci

Exponenciální funkce

$$f(x) = e^x$$



$D_f = \mathbb{R}$, prostá na celém D_f.

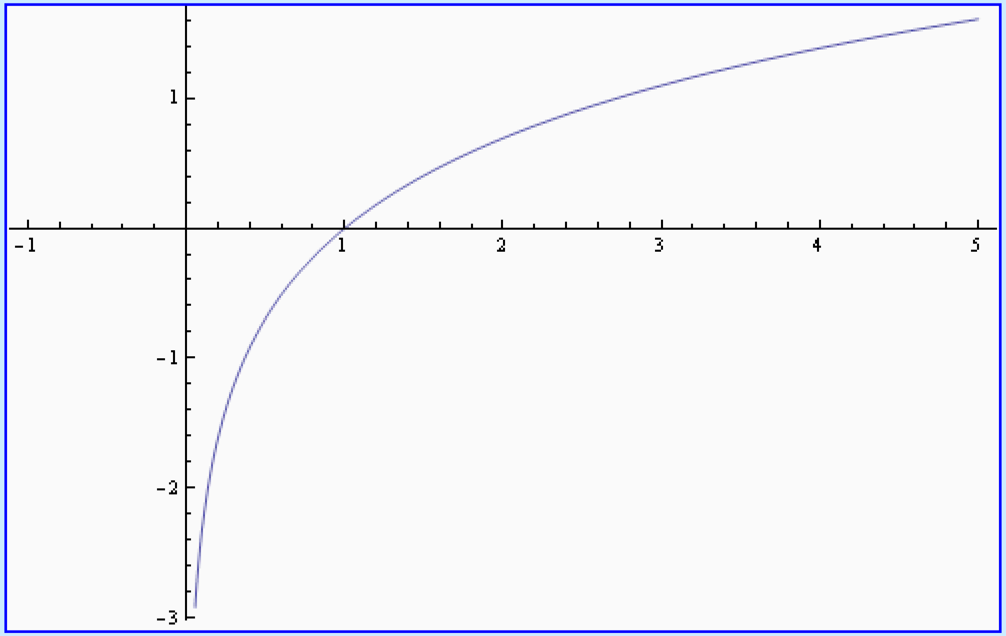
Logaritmická funkce

Zavede se jako inverzní funkce k exponenciální funkci:

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ … logaritmická funkce o základu a

Vlastnosti: $\mathrm{D}_\mathrm{f} = (0, \infty)$

$\mathrm{H}_\mathrm{f} = \mathbb{R}$



Užitečné vztahy:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

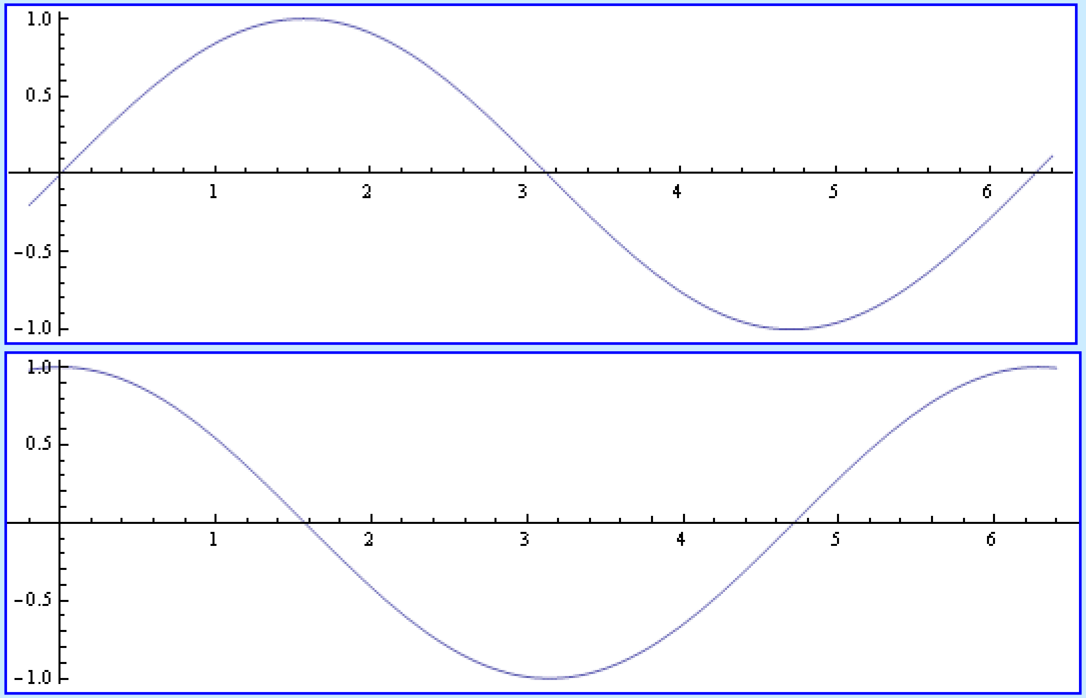
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

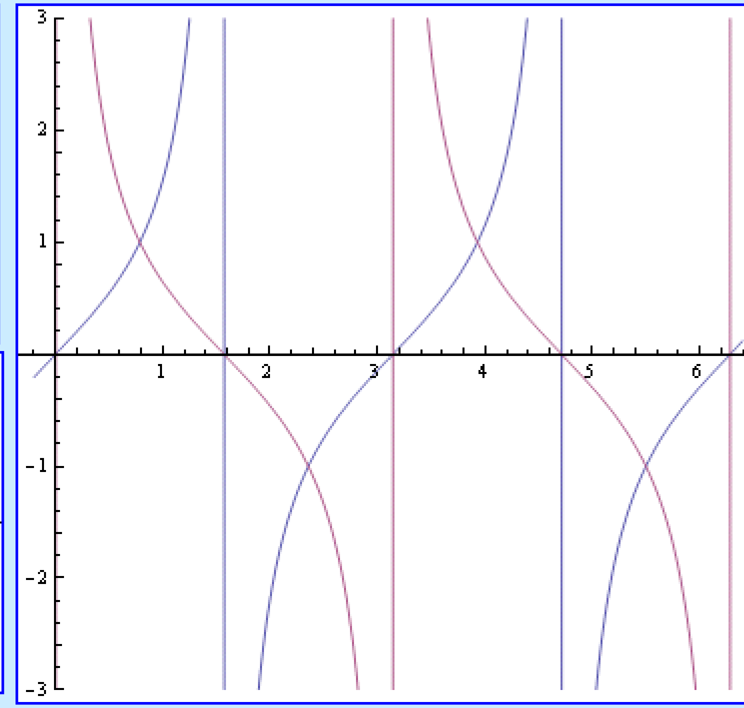
Logaritmus a exponenciální funkce jsou prosté na celém definičním oboru a jedná se o inverzní funkce, které lze použít při úpravách rovnic jako ekvivalentní úpravy.

Goniometrické funkce

sin x, cos x



tg x, cotg x



Vlastnosti: jsou periodické, sin x *a* cos x *jsou definované na celém* $\mathbb{R}$ *,* sin x *lichá,* cos x *sudá.*

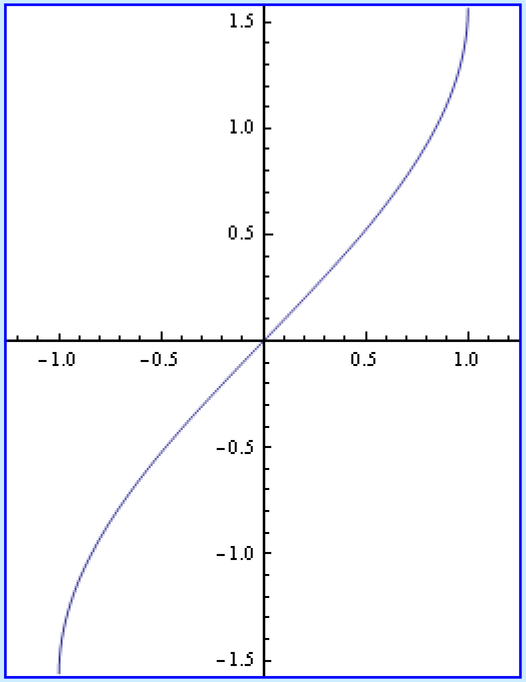
tg x *má definiční obor* $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ *a* cotg x $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Užitečné vzorce:

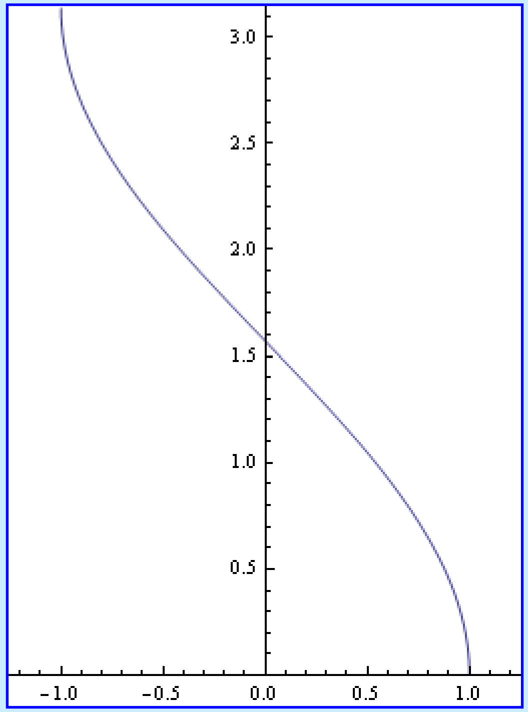
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Cyklometrické funkce

arcsin x,



arcos x



Vlastnosti:

arcsin x : $D_f = \langle -1, 1 \rangle$

$H_f = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

lichá,

arccos x : $D_f = \langle -1, 1 \rangle$

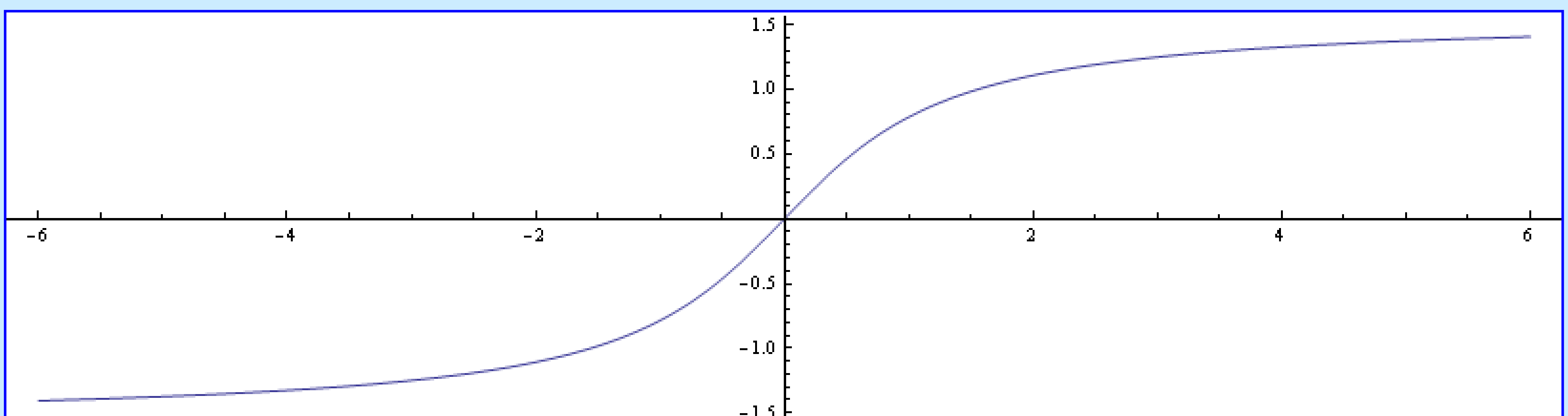
$H_f = \langle 0, \pi \rangle$

arctan x : $D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

lichá.

arctan x



Rovnice a nerovnice

- Řešení rovnic obecně, ekvivalentní úpravy
- Lineární rovnice a nerovnice, soustavy. Determinant.
- Nerovnice
- Rovnice s absolutní hodnotou.
- Iracionální rovnice
- Exponenciální a logaritmické rovnice.
- Goniometrické rovnice.

Postup při provádění neekvivalentních úprav:

Pozor na případy, kdy si buď si nechtěně vygenerujeme domnělé řešení navíc (například při umocňování – nutno provést zkoušku), nebo se naopak o nějaké řešení připravíme (například při odmocňování, kdy je nutno doplnit zápornou větev odmocniny).

Příklady viz http://math.feld.cvut.cz/0educ/priprava/, na semináři budeme řešit neřešení příklady z tohoto textu.

Soustavy lineárních rovnic

Jsou rovnice typu

$$ax + by = u$$
$$cx + dy = v$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ... koeficienty

$x, y \in \mathbb{R}$ ... proměnné

$u, v \in \mathbb{R}$ ... koeficienty pravé strany

Metody řešení:

a) Metoda sčítací

Rovnice vynásobíme vhodnými koeficienty tak, aby se po jejich sečtení jedna z proměnných odečetla. Získáme tak jednu rovnici o jedné neznámé. Po jejím vyřešení dosadíme toto řešení do libovolné z původních rovnic a vyřešíme zbývající proměnnou.

Příklad:

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y = 7 & \\ \oplus\ 4x - y = 2 & / \times 2 \\ \hline 11x = 11 & \\ \underline{\underline{x = 1}} & \\ 3.1 + 2y = 7 & \\ 2y = 4 & \\ \underline{\underline{y = 2}} & \end{array}$$

b) Metoda porovnávací

Členy s jednou proměnnou převedeme na jednu stranu a vynásobíme rovnice vhodnými koeficienty tak, aby obě rovnice měly na jedné straně tentýž výraz. Druhé strany pak položíme sobě rovny, čímž získáme jednu rovnici pro jednu neznámou. Dále viz a).

Příklad:

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y = 7 & \\ 4x - y = 2 & / \times (-2) \\ \hline 2y = 7 - 3x & \\ 2y = -4 + 8x & \\ \hline 7 - 3x = -4 + 8x & \\ \underline{\underline{x = 1}} & \end{array}$$

a dále stejně jako v a)

c) Metoda eliminační

Z jedné rovnice vyjádříme jednu proměnnou, získaný výraz dosadíme do druhé rovnice, čímž dostaneme jednu rovnici pro jednu neznámou. Další postup je shodný s postupem v bodě a). Tuto metodu je možné použít někdy i pro složitější rovnice než lineární.

Příklad:

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 4x - y = 2 \rightarrow y = 4x - 2 \\ \hline \end{array}$$

dosadíme do 1. rovnice:

$$3x + 2(4x - 2) = 7$$
$$11x = 11$$
$$\underline{\underline{x = 1}}$$

a dále stejně jako v a)

Soustavy lineárních rovnic - determinant

Nabízí se otázky typu:

- Existuje vždy řešení?
- Nemůže výpočet při určitých hodnotách koeficientů selhat?
- Nemůže existovat více řešení? Apod.

Zkusme soustavu $\begin{array}{l} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{array}$ vyřešit zcela obecně.

Řešení (viz výpočet vpravo) můžeme napsat ve tvaru $x=\dfrac{ud-bv}{D}$, $y=\dfrac{av-cu}{D}$

kde $D=ad-cb$ je *determinant*. Ten musí být nenulový, jinak uvedené vzorce nemohou platit.

Význam determinantu:

1. $D\neq 0$ Soustava rovnic má jediné řešení, které lze vyjádřit předchozími nalezenými vzorci,

2. $D=0$ Soustava může mít nekonečně mnoho řešení nebo řešení nemusí existovat. O tom, který případ nastane, rozhodují koeficienty na pravé straně u a v.

$$\begin{array}{rl} ax+by=u & /\times c \\ \oplus\; cx+dy=v & /\times(-a) \\ \hline (cb-ad)\,y=cu-av & \end{array}$$

$$\underline{\underline{y=\frac{av-cu}{ad-cb}}}$$

$$ax+b\,\frac{av-cu}{ad-cb}=u$$

$$ax=u-b\,\frac{av-cu}{ad-cb}$$

$$ax=\frac{u(ad-cb)-bav+bcu}{ad-cb}$$

$$ax=\frac{uad-\cancel{ucb}-bav+\cancel{bcu}}{ad-cb}$$

$$ax=\frac{uad-bav}{ad-cb}$$

$$\underline{\underline{x=\frac{ud-bv}{ad-cb}}}$$

Rovnice s absolutní hodnotou

Jsou rovnice obsahující výrazy v absolutních hodnotách.

Postup řešení:

Rovnici řešíme u každé absolutní hodnoty zvlášť pro případ, kdy je výraz v absolutní hodnotě nezáporný a kdy je záporný. V každém z obou případů dostaneme jinou rovnici, protože absolutní hodnota v prvním případě nezmění a ve druhém změní znaménko výrazu.
Pro každý případ rovnici vyřešíme a najdeme průnik řešení rovnice a podmínky pro výraz v absolutní hodnotě. Výsledné řešení pak je sjednocením všech dílčích řešení.

V případě více absolutních hodnot se nám tak postup řešení rozdělí na další dvě části vždy s každou další absolutní hodnotou, tj. například u dvou absolutních hodnot máme čtyři větve řešení, kde musíme v každé větvi vždycky vyřešit rovnici spolu s podmínkou. Někdy ale některá kombinace podmínek je prázdná množina, u lineárních rovnic toto dokonce nastane vždy, čehož můžeme využít a snížit tak hned na začátku množství větví.

Příklad:

$|3x+1| - 6x + 3 = |x|$

$3x + 1 \geq 0$		$3x + 1 < 0$	
$x \geq 0$	$x < 0$	$x \geq 0$	$x < 0$
$3x + 1 - 6x + 3 = x$ $-4x = -4$ $x = 1$ splňuje podmínky	$3x + 1 - 6x + 3 = -x$ $-2x = -4$ $x = 2$ nesplňuje podmínky, řešení neexistuje	není možno splnit	$-(3x + 1) - 6x + 3 = -x$ $-8x = -2$ $x = 1/3$ nesplňuje podmínky, řešení neexistuje

Výsledné řešení je sjednocení jednotlivých řešení, tedy $x = 1$.

Rovnice neřešitelné konečným počtem operací

Příklad takové rovnice: $e^x - 5x = 1$

Rovnici nelze řešit logaritmováním levé a pravé strany, při takovém postupu obdržíme jednu neznámou v logaritmu a druhou mimo logaritmus a převedeme jen exponenciální rovnici na logaritmickou, stejně obtížně řešitelnou.

Nalezení přibližného řešení (tzv. *prostou iterační metodou*):
Z rovnice vyjádříme neznámou x, vybereme si její první výskyt v exponenciále:

$$x = \ln(5x + 1)$$

Kdybychom nyní dosadili řešení (což nemůžeme, jelikož jej neznáme), byla by i tato rovnice splněna, neboť je z hlediska řešení se zadanou rovnicí ekvivalentní (použili jsme jen ekvivalentní úpravy). Zkusme nyní nějaké x zvolit a dosazením do pravé strany ověřit, jak se bude řešení blížit. Obdržíme novou hodnotu x a tu můžeme znovu dosadit do levé strany. Postup výpočtu je následující:

a) x_0 volíme libovolné (snažíme se co nejblíž řešení, pokud jej lze odhadnout),

b) další hodnoty x vypočítáme z iterační rovnice $x_{i+1} = \ln(5x_i + 1)$,

c) při požadované přesnosti výpočet ukončíme a dané x_i prohlásíme za přibližný výsledek.

Všimněte si, že jsme obdrželi po 19 iteracích výsledek s přesností na 9 platných míst, pro praxi více než dostačující výsledek.

iterace	hodnota
0	2,00000000
1	2,39789527
2	2,56413952
3	2,62616729
4	2,64835939
5	2,65618109
6	2,65892336
7	2,65988302
8	2,66021863
9	2,66033598
10	2,66037701
11	2,66039135
12	2,66039636
13	2,66039812
14	2,66039873
15	2,66039894
16	2,66039902
17	2,66039904
18	2,66039905
19	2,66039906
20	2,66039906
21	2,66039906
22	2,66039906

Rovnice neřešitelné konečným počtem operací

Při řešení obtížnějších rovnic můžete použít také Wolfram Alpha server
(server tvůrců programu pro symbolické výpočty Mathematica).

Tento server se snaží porozumět matematickým, fyzikálním, technickým a ekonomickým zadáním s volnou syntaxí.

Předchozí úlohu byste například zadali takto: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+e%5Ex+-+5x+%3D+1

Zkuste se také podívat na vzorce pro výpočet kořene polynomu 2., 3. a 4. stupně (stačí zadat rovnici s obecnými koeficienty):

- Kvadratická rovnice: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E2+%2B+bx+%2Bc++%3D+0
- Kubická rovnice: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E3+%2B+b+x%5E2+%2Bcx+%2Bd+%3D+0
- Rovnice 4. stupně: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E4%2B+b+x%5E3+%2Bc+x%5E2+%2Bd+x%2Be+%3D+0
- Rovnice 5. stupně (pro ní již přesný vzorec pro řešení neexistuje): http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E5%2B+b+x%5E4+%2Bc+x%5E3+%2Bd+x%5E2%2Be+x+%2Bf%3D+0

Pozor, server používá odlišné označení logaritmů než jaké se vyskytuje v českých učebnicích. lg je náš „desítkový“ logaritmus log a log je náš přirozený logaitmus ln. Před zadáním si raději ověřte, zda používáte správný symbol, například zadáním lg 10 či lg *e*.