Přípravný kurz fyziky 2020 úvodní informace

Informace: http://aldebaran.cz/~zacek/
Stránka kurzu: https://mfkurz.fel.cvut.cz/

Rozsah: 10×90 minut, celkem 900 minut, 15 hodin
Vyučující:
Martin Žáček
E-mail na vašeho vyučujícího: zacekm@fel.cvut.cz

Náplň:

- kinematika hmotného bodu,
- dynamika hmotného bodu,
- mechanika tuhého tělesa,
- kmitání a vlnění,
- termodynamika,
- gravitační pole
- elektrické pole,
- magnetické pole.

Literatura:

Zejména na příklady vhodný zdroj, obsahuje řešené i neřešené příklady, psané VŠ pedagogy: http://webfyzika.fsv.cvut.cz

Základní jednotky SI (do r. 2018)

SI … mezinárodní soustava jednotek (International System of Units)

Počátky v 18. století, snaha o ukončená dosavadního chaosu mnoha různých spolu vzájemně nesouvisejících měrových jednotek. SI jak ji známe dnes však byla zavedena až r. 1960. Francouzské Národní shromáždění rozhodlo o nutnosti likvidace chaosu v měrových jednotkách a r. 1790 pověřilo Francouzskou akademii vypracovat vyhovující soustavu měr upotřebitelných po celém světě. 1875: ustavení *Mezinárodní metrické konvence*, dohoda 18 signatárních států, která zřídila *Mezinárodní úřad pro váhy a míry*.

délka	metr	m	Metr je dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 s.	1983
hmotnost	kilogram	kg	Kilogram je hmotnost mezinárodního prototypu, uloženého u Mezinárodního úřadu pro míry a váhy v Sèvres ve Francii.	1889
čas	sekunda	s	Sekunda je doba rovnající se 9 192 631 770 periodám záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemé struktury základního stavu atomu cesia $^{133}C_s$.	1967
elektrický proud	ampér	A	Ampér je elektrický proud, který vyvolá mezi dvěma rovnoběžnými vodiči délky 1 m vzájemnou sílu o velikosti 2×10^{-7} N	1908
teplota	kelvin	K	Kelvin je 1/273,16 část termodynamické teploty trojného bodu vody.	1979
látkové množství	mol	mol	Mol je takové látkové množství, které obsahuje tolik elementárních jedinců, kolik je atomů obsažených ve 12 g uhlíku ^{12}C	1971
svítivost	kandela	cd	Kandela je svítivost monochromatického zdroje o frekvenci 540×10^{12} Hz, jehož zářivost v daném směru činí 1/683 wattů na steradián.	1979
úhel	radián	rad	Radián je úhel, který vytkne na jednotkové kružnici oblouk délky 1 m.	
prostorový úhel	steradián	srad	Steradián je prostorový úhel, který vytkne na jednotkové sféře plochu 1 m^2.	

Základní jednotky SI (od roku 2019)

Mezinárodní výbor pro míry a váhy navrhl v roce 2011 změnu definic základních jednotek soustavy SI, která byla přijatá v roce 2018 a vstoupila v platnost v květnu 2019.

Zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/Soustava_SI

čas	sekunda	s	Sekunda je doba rovnající se 9 192 631 770 periodám záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemé struktury základního stavu atomu cesia $^{133}C_s$.	1967
délka	metr	m	Metr je dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 s.	1889
hmotnost	kilogram	kg	Kilogram je hmotnost odvozena od Planckovy konstanty zafixované na hodnotu $6.626\ 070\ 15 \cdot 10^{-17}$ Js.	2019
elektrický proud	ampér	A	Ampér je elektrický proud odvozený z fixní hodnoty elementárního náboje $1.602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C.	2019
teplota	kelvin	K	Kelvin je definován fixací Boltzmannovy konstany na hodnotku $k = 1.380\ 649 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$.	2019
látkové množství	mol	mol	Mol je takové látkové množství, které obsahuje $6.022\ 140\ 76 \cdot 10^{-23}$ elementárních entit.	2019
svítivost	kandela	cd	Kandela je svítivost monochromatického zdroje o frekvenci 540×1012 Hz, jehož zářivost v daném směru činí 1/683 wattů na steradián.	1979
úhel	radián	rad	Radián je úhel, který vytkne na jednotkové kružnici oblouk délky 1 m.	
prostorový úhel	steradián	srad	Steradián je prostorový úhel, který vytkne na jednotkové sféře plochu 1 m^2.	

Další odkazy: *https://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units*

https://www.nist.gov/pml/weights-and-measures/metric-si/si-units

Základní jednotky SI

„Chceme-li mít absolutně stálé standardy délky, času a hmotnosti, nesmíme je vytvářet z hmotných prototypů nebo je odvozovat z rozměrů či pohybů Země, ale musíme je realizovat na základě procesů odehrávajících se v nitru atomů, např. pomocí vlnové délky nebo frekvence elektromagnetického záření vysílaného atomy.“ (*J. C. Maxwell, 1870, při příležitosti schůze Britské společnosti pro pokrok vědy*)

Základní literatura o jednotkách SI:

J. Brož, V. Roskovec: Základní fyzikální konstanty, SNTL, Praha 1987
SI na NIST *(Národní institut pro standardizaci a technologii)* http://physics.nist.gov/cuu/Units/

Doplňková literatura o jednotkách, konstantách a metodách jejich měření:

V. Kaizr: Měření rychlosti světla http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004_s1.html
V. Kaizr: Měření gravitační konstanty http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004_s2.html
V. Kaizr: Měření Planckovy konstanty http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004_s3.html
P. Kulhánek: Pár otázek nad konstantami a jednotkami SI http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004_s4.html
M. Žáček: Kelvin, mol, kandela http://www.aldebaran.cz/bulletin/2005_s1_uni.html
M. Žáček: Nová definice kilogramu http://www.aldebaran.cz/bulletin/2008_28_kil.php
M. Žáček: Nejmenší atomové hodiny http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004_43_nah.html
P. Kulhánek: Už není kilo to, co dříve bylo https://www.aldebaran.cz/bulletin/2018_43_kil.php

Kinematika

Kinematika se zabývá popisem pohybů, nezkoumá však jejich příčiny.

Pojmy:

Souřadnicová soustava: počátek + souřadnicové osy.

Vztažná soustava: souřadnicová soustava + způsob, jak měříme čas a délky.

Poloha bodu: je popsána trojicí reálných čísel, které však mají smysl pouze tehdy, je-li definována souřadnicová soustava. Pak jim říkáme souřadnice a spolu se souřadnicovou soustavou definují jednoznačně polohu bodu v prostoru.

Trajektorie: Spojitá posloupnost bodů (*různé způsoby zadání trajektorie, viz dále).*

Rychlost (označení *v*, jednotka SI: m/s): udává, jak se mění souřadnice v čase. Je potřeba se dobře orientovat ve zdánlivém chaosu moha různých rychlostí, protože můžeme rozlišit například rychlost průměrnou, okamžitou, souřadnicovou, celkovou velikost rychlosti nebo rychlost jako vektor

Zrychlení (označení *a*, jednotka SI: m/s^2): udává, jak se mění v čase rychlost. Směr zrychlení nemusí být ve směru pohybu, jako je to u rychlosti. Například pokud je dráha křivočará a hmotný bod nemění rychlost, míří zrychlení do středu zakřivení.

Kinematika – popis trajektorie

Trajektorii můžeme zadat různými způsoby:

a) parametricky:

$$x(t)$$
$$y(t)$$
$$z(t)$$
$$t \in \langle t_1, t_2 \rangle$$

b) jako funkce:

$$y(x)$$
$$z(x)$$
$$x \in \langle x_1, x_2 \rangle$$

c) jako rovnici:

$$F(x, y, z) = 0$$

Jednotlivá vyjádření mají své výhody a nevýhody, například u některých křivek nelze po celé jejich délce vyjádřit jednu proměnnou jako funkci jiné proměnné, když pro hodnotu jedné souřadnice nalézáme více hodnot ve druhé souřadnici. Můžeme tedy takto popsat jen část křivky a v jiné části křivky zvolit jako nezávisle proměnnou jinou souřadnici. Nebo můžeme křivku rozdělit na více větví. U vyjádření, kde se nevyskytuje parametr, se také hůře zadává rozsah bodů, popřípadě směr pohybu.

Příklady:

a)

$$x(t) = 2\cos 2t$$
$$y(t) = \sin 2t$$
$$t \in \langle 0, \pi \rangle$$

b)

$$y(x) = \pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2}$$
$$x \in \langle -2, 2 \rangle$$

c)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Ve všech případech jde o tutéž křivku, elipsu s poloosami délky 2 a 1. Všimněte si, že u b) jsme potřebovali zapsat zvlášť 2 větve elipsy, s kladnou a se zápornou souřadnicí *y* a že se také ztrácí informace o směru pohybu po křivce a tudíž nelze například určit rychlost. U c) neznáme také směr a rychlost pohybu, zato jde o hezký a kompaktní zápis. Ve fyzice dáváme nejraději přednost zápisu a).

Kinematika – popis pohybu

Popis pohybu po křivce: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle$

$\mathbf{r}(t)$ je polohový vektor, všimněte si, že jde vlastně o úsporný, vektorový zápis parametrického zadání křivky, kde parametrem je čas. K zadání pohybu potřebujeme zadat tři funkce času, které představují jednotlivé souřadnice.

Okamžitá rychlost je definována vztahem $\mathbf{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$, po dosazení a zderivování

$\mathbf{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t), y(t), z(t)) = (\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$, vektor tedy derivujeme

po složkách (to lze obecně pouze v kartézské souřadnicové soustavě). Jednotlivé rychlosti v_x, v_y a v_z jsou složky vektoru rychlosti a mají význam rychlostí ve směru jednotlivých souřadnic.

Pozor! Nezaměňujte **okamžitou rychlost** s **průměrnou rychlostí**. Okamžitá rychlost je *funkce času*, průměrná rychlost je *číslo*. Průměrná rychlost nezávisí na tvaru křivky ani na průběhu pohybu po křivce, jen na délce křivky a na časech průchodu počátečním a koncovým bodem.

Průměrná rychlost: $v = \dfrac{s}{\Delta t}$, kde s je délka dráhy a Δt je časový rozdíl mezi průchody počátečním a koncovým bodem křivky.

Kinematika – přímočarý pohyb

Nejjednodušší možná trajektorie je přímka. Pohybu po přímce říkáme **přímočarý pohyb**.

V tomto případě je vhodné zvolit souřadnicovou soustavu tak, aby směr přímky byl totožný se směrem jedné souřadnicové osy. Pohyb pak bude možné popsat jedinou funkcí $x(t)$.

Poloha, rychlost a zrychlení přímočarého pohybu:

$$x(t), \qquad v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Inverzní vztahy jsou dány integrály, protože integrál je inverzní operace k derivaci:

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int\left(\int a(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t, \qquad v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t.$$

Vztahy můžeme vyjádřit buď neurčitým integrálem (pak je výsledek určen nejednoznačně, protože neznáme hodnotu integrační konstanty, tu musíme určit ze zadání úlohy a také závisí na volbě počátku souřadnicové soustavy) nebo určitým integrálem:

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t, \qquad v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t.$$

Zde výsledek vyjde vždy jako rozdíl hodnot na konci a na počátku pohybu, nebude tedy záviset na volbě počátku souřadnicové soustavy.

Kinematika – speciální případy pohybů

a) Rovnoměrný pohyb

Je definován nulovým zrychlením nebo konstantní rychlostí.

$$a(t) = 0 \qquad v(t) = v_0 = konst \qquad s(t) = v_0 t + s_0$$

b) Rovnoměrně zrychlený pohyb

Je definován konstantním zrychlením nebo lineárně se měnící rychlostí.

$$a(t) = konst \qquad v(t) = at + v_0 \qquad s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

Poznámky:

Vztahy mezi dráhou, rychlostí a zrychlením byly získány z obecných vztahů uvedených na předchozím slajdu.

Veličiny označeny nulovým indexem jsou integrační konstanty. Ty je nutno v konkrétní úloze určit ze zadání.

Všimněte si, že ve vzorcích je tolik integračních konstant, kolikrát se integrovalo. S počtem integrací se také zvyšují mocniny času v jednotlivých členech. Toto usnadní zapamatování vzorců.

Kinematika – otáčivý pohyb

Pohyb po kružnici

Lze převést na pohyb po přímce a použít stejný aparát, jako u kinematiky v jedné dimenzi. Tedy jako bychom kružnici narovnali do přímky

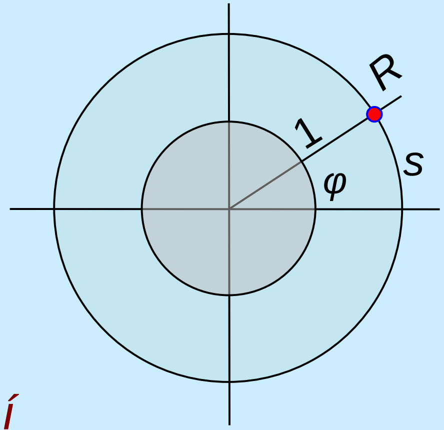
R … poloměr otáčení

$s(t)$ … dráha (zde délka oblouku kružnice)

$v(t)$, $a(t)$ … zavede se stejně jako u kinematiky po přímce

Lépe: přepočítat všechny veličiny na jednotkovou kružnici.

- **úhel** $\varphi(t) = \dfrac{s(t)}{R}$ bezrozměrný, označuje se pomocnou jednotkou *radián*
- **úhlová rychlost** $\omega(t) = \dfrac{v(t)}{R}$ jednotka: rad/s
- **úhlové zrychlení** $\varepsilon(t) = \dfrac{a(t)}{R}$ jednotka: rad/s^2



výhoda: jednotný popis pro všechny kružnice o jakémkoliv poloměru

Úloha: rovnoměrně zpomalující setrvačník,
jaké je úhlové zrychlení, kolik vykoná otáček do zastavení

Příklady - kinematika

Dva řešené příklady:
http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_resene_1.pdf

17 neřešených příkladů:
http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_neresene_1.pdf

Poznámka k derivacím a integrálům:

Na semináři jsme se naučili geometrický a fyzikální význam derivace a řekli jsme si, že z hlediska funkcí je integrál opačná operace k derivaci. K funkci zadané graficky byste tedy například měli umět nakreslit její derivaci nebo integrál.

V příslušných partiích matematických lekcí z diferenciálního a integrálního počtu se naučíte, jak najít některé derivace či integrály k funkcím zadaným algebraicky (tj. jako matematický vzorec). Do té doby si můžete zkusit nástroj **Wolfram Alpha**:

http://www.wolframalpha.com/calculators/derivative-calculator/
http://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator/

Dynamika

Dynamika zkoumá pohyby a jejich příčiny. Na rozdíl od kinematiky pracuje s veličinami jako jsou síla a hmotnost. Statika je zvláštní případ dynamiky, kdy jde o rovnováhu.

Pohyb hmotného bodu, resp. tělesa, se kterým zde ale pracujeme jako s hmotným bodem

(nezabýváme se otáčivým pohybem a zanedbáváme jeho rozměry) se řídí

Newtonovými pohybovými zákony:

Zákon setrvačnosti:

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu nebo v rovnoměrném otáčivém pohybu nebo v kombinaci obou pohybů, pokud na něj nepůsobí vnější síla.

Zákon síly:

Zrychlení tělesa je úměrné síle působící na hmotný bod, koeficient úměrnosti je setrvačná hmotnost. Matematicky: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$,

m … hmotnost (kg), $\mathbf{F}$ … síla (N = kg.m/s^2).

Zákon akce a reakce:

Každá síla působící na těleso vyvolá sílu stejně velkou, opačně orientovanou.

Dynamika – neinerciální soustavy

V **inerciální vztažné soustavě** platí Newtonovy pohybové zákony.

V **neinerciální vztažné soustavě** se objevují zdánlivé síly (setrvačná, odstředivá, …).

Příklady neinerciálních vztažných soustav:

- zrychleně se pohybující se výtah s člověkem stojícím na váze,
- autobus jedoucí zatáčkou,
- centrifuga

U všech těchto příkladů jsme si uváděli popis z hlediska vnějšího pozorovatele nacházejícího se v inerciální soustavě (pozoruje pohyb jakoby z vnějšku) a pozorovatele neinerciální soustavě.

Dostředivá síla: míří do středu otáčení a její velikost je $F_{\mathrm{d}} = m\dfrac{v^2}{R}$,

odstředivá síla se objeví jen při popisu vzhledem k soustavě, která se otáčí spolu se zkoumaným systémem, má stejnou velikost ale opačnou orientaci, míří tedy směrem od středu.

V neinerciální vztažné soustavě má pohybový zákon tvar $\mathbf{F}^* + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$,

kde síla s hvězdičkou jsou zdánlivé síly (setrvačná, odstředivá, a další, složitější síly).

Demonstrace neinerciálnosti soustavy: Fucoultovo kyvadlo (v budově FEL na KN).

Dynamika - hybnost

Hybnost je součin rychlosti a hmotnosti. Na rozdíl od rychlosti platí pro hybnost zákon zachování.

Zákon zachování hybnosti: celková hybnost v izolované soustavě je konstantní.

Izolovaná soustava je soustava, která si nevyměňuje s okolím energii.

Vedle zákona zachování celkové energie patří zákon zachování hybnosti k základním zákonům zachování v přírodě. Pomocí zákona zachování hybnosti se řeší například úlohy na srážky.

Hybnost značíme *p* a nemá žádnou speciální jednotku, používáme složenou jako kg·m/s.

Jde o vektorovou veličinu, její směr je shodný se směrem rychlosti, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Příklad: Jaká bude rychlost loďky včetně člověka nacházejícího se v loďce s celkovou hmotností M, vystřelí-li člověk nacházející se v loďce z pušky vodorovně střelu o hmotnosti m? Loďka se před výstřelem nepohybuje.

Řešení:

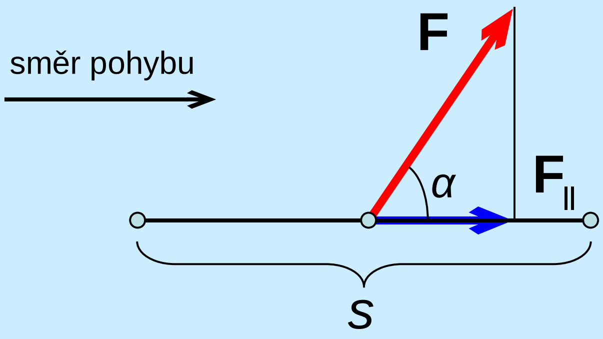
Celková hybnost soustavy před výstřelem je nulová, rovná se celkové hybnosti po výstřelu, $p = mv_{\mathrm{S}} - (M - \underline{m})v_{\mathrm{L}} = 0$, indexem L jsme označili rychlost loďky, indexem S rychlost střely.

Z rovnice vyjádříme hledanou rychlost: $v_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{S}}m/(M - m)$, hmotnost střely m lze zanedbat oproti hmotnosti člověka s loďkou M a dostaneme výslednou rychlost loďky po výstřelu jako $v_{\mathrm{L}} = v_{\mathrm{S}}m/M.$

Mechanická práce

Mechanická práce vykonaná působící sílou **F** na dráze *s*:

$$A = F_{\parallel} s = (F \cos\alpha) s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

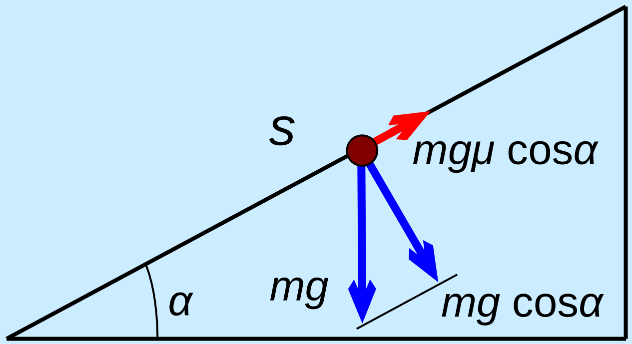


Poslední výraz je skalární součin, ve kterém je člen cos*α* již obsažen z definice.

- Práci vykonává pouze rovnoběžná složka síly s dráhou.
- Práce závisí na směru pohybu, pokud směr obrátíme, tj. necháme těleso pohybovat mezi koncovými body dráhy v opačném směru, výsledná práce bude záporná.

Úloha: Spočítejte práci vykonanou při posunu tělesa v tíhovém poli po nakloněné rovině délky s, hmotnost tělesa je m a koeficient tření mezi tělesem a podložkou je μ.

Řešení: Musíme najít sílu rovnoběžnou se směrem pohybu, tou je síla tření rovna $F_s = \mu F_{\perp}$, kolmá síla na podložku $F_{\perp}$ je rovna mg cos*α*, práce je rovna součinu dráhy a rovnoběžné síly, dostaneme tedy výsledek $A = s\, \mu\, mg \cos\alpha$. Tato vykonaná práce se změní v teplo. Práce gravitačního pole po odečtení práce třecí síly je rovna přírůstku kinetické energie na dráze *s.*



Potenciální energie

Vztahy mezi silou $F(x)$ a potenciální energií $E_P(x)$:

$$E_P(x) = -\int F(x)\,\mathrm{d}x \qquad F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_P(x)}{\mathrm{d}x}$$

Poznámky:

- uvedené vztahy jsou jednodimenzionální, předpokládá se závislost jen na jedné souřadnici,
- obecnější vztahy závisí na třech souřadnicích, použitý aparát však v tomto případě již přesahuje středoškolské učivo (místo obyčejného integrálu je křivkový integrál a místo derivace podle jedné proměnné je v tomto případě gradient, což je vektorový operátor),
- potenciální energie je určena jednoznačně až na konstantu, volbou konstanty určíme tzv. vztažný bod, tj. souřadnici x_0, pro kterou je potenciální energie nulová.

Příklad: Najděte potenciální energii k tíhovému poli $F(y) = -mg$.
Řešení: $E_P(y) = mgy$. Najde se snadno, jako integrál z konstanty, integrační konstantu volíme nulovou, tím pokládáme nulovou potenciální energii do bodu $y = 0$.

Příklady – mechanika hmotného bodu

9 řešených příkladů:
http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_resene_2.pdf

15 neřešených příkladů:
http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_neresene_2.pdf

Mechanika tuhého tělesa

Dokonale tuhé těleso: je pomocný pojem vytvořený pro to, aby se nám lépe řešily úlohy, ve kterých lze pružnost tělesa zanedbat. Ve skutečnosti je každé těleso pružné. V dokonale tuhém tělese by se mechanické působení přenášelo nekonečnou rychlostí na všechny body v tělese, což není možné, ve skutečnosti se mechanické rozruchy šíří nanejvýš rychlostí zvuku.

Moment síly: je součin ramena a kolmé složky síly k rameni. Pokud je případ třírozměrný, tj. osa otáčení a vektor síly neleží v jedné rovině, musíme nejprve najít složku síly ležící v rovině kolmé na osu otáčení, poté tuto složku rozložíme na kolmou a rovnoběžnou složku. Moment síly spočítáme jako součin této kolmé složky síly a ramene. Moment síly má otáčivý účinek.

Těžiště: je působiště všech vnějších sil. Modelový příklad k demonstraci těžiště je rovnováha na dvoustranné páce, kdy se rovná moment síly působící nalevo od podpěry momentu síly napravo. V obecnějším případě řešíme n hmotných bodů nebo spojitá tělesa, kdy však musíme zavádět hustoty sil (síla působící na jednotku objemu tělesa) a sčítat je spojitě, místo sumace bude proto integrace. Matematicky však tento přístup již přesahuje středoškolské učivo.

Experimentální určení těžiště: u podélných těles se snažíme najít rovnováhu podepřením v bodě, ve kterém se těleso nepřevrací a je v rovnováze. Tento bod najedeme například posouváním dvou podpěr k sobě, neboť podpora, která je blíž těžišti je zatížena větší silou a dochází k většímu tření, posouvá se proto podpěra, která je dál od těžiště. Další možnost je zavěšení tělesa. Pokud těleso zavěsíme postupně ve dvou různých bodech, získáme dvě vertikály, jejichž průsečíkem je těžiště určeno.

Těžiště

Těžiště soustavy hmotných bodů:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

Na vzorec můžeme nahlížet jako na vážený průměr, váhy jsou hmotnosti Jednotlivých hmotných bodů.

Limitní případy:

- stejné hmotnosti (ty se vykrátí a obdržíme „obyčejný“ tj. aritmetický průměr),
- Jedna hmotnost dominuje (ostatní členy lze zanedbat, poloha těžiště vyjde v dominantním bodě,).

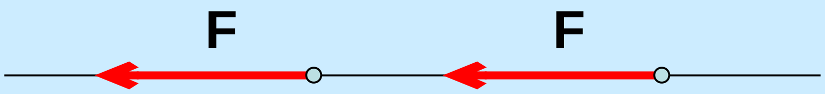
Těžiště tuhého tělesa se počítá obdobně, avšak jakoby šlo o soustavu nekonečně mnoha hmotných bodů vyplňujících objem tělesa. Místo sumy se používá speciální, tzv. objemový integrál, který však není obsažen ve středoškolském učivu matematiky.

Počítali jsme těžiště tří hmotných bodů a ukazovali jsme si různé přístupy k výpočtu.
Lze řešit buď vektorově, pomocí uvedeného vzorce, ale také postupným zjednodušováním, kdy těžištěm nahrazujeme jednotlivé skupiny bodů, u nichž lze těžiště nejsnáze určit, nejlépe zpaměti bez počítání a až na konec spočítáme společné těžiště všech skupin.

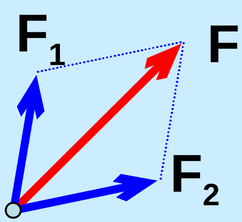
Skládání sil

Skládání sil se řídí následujícími pravidly:

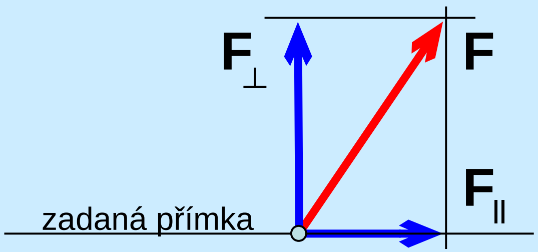
1. Jednotlivé síly lze libovolně **posouvat** ve směru jejich působení (tzv. **klouzavé vektory**).



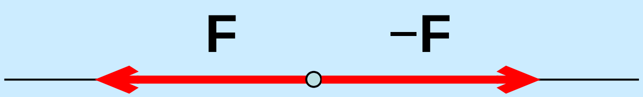
2. Síly nacházející se ve stejném působišti lze vektorově **sčítat** nebo naopak **rozkládat**.



$$F = F_1 + F_2$$



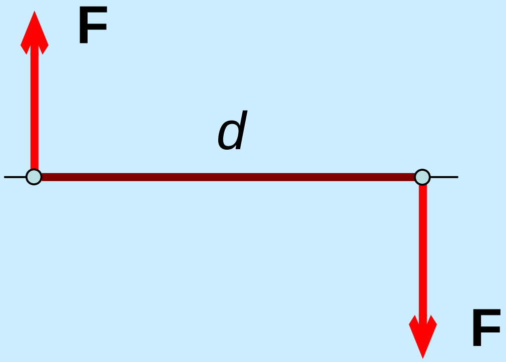
3. Do jakéhokoliv působiště můžeme **přičíst nulovou sílu**, jako dvojici opačných sil.



4. V kolmém směru lze síly posouvat v případě, přidáme-li vhodný **moment dvojice sil**.

Moment dvojice sil: $M = Fd$

Nemá definováno působiště. Má na těleso otáčivý účinek.



Moment síly – metody jeho výpočtu

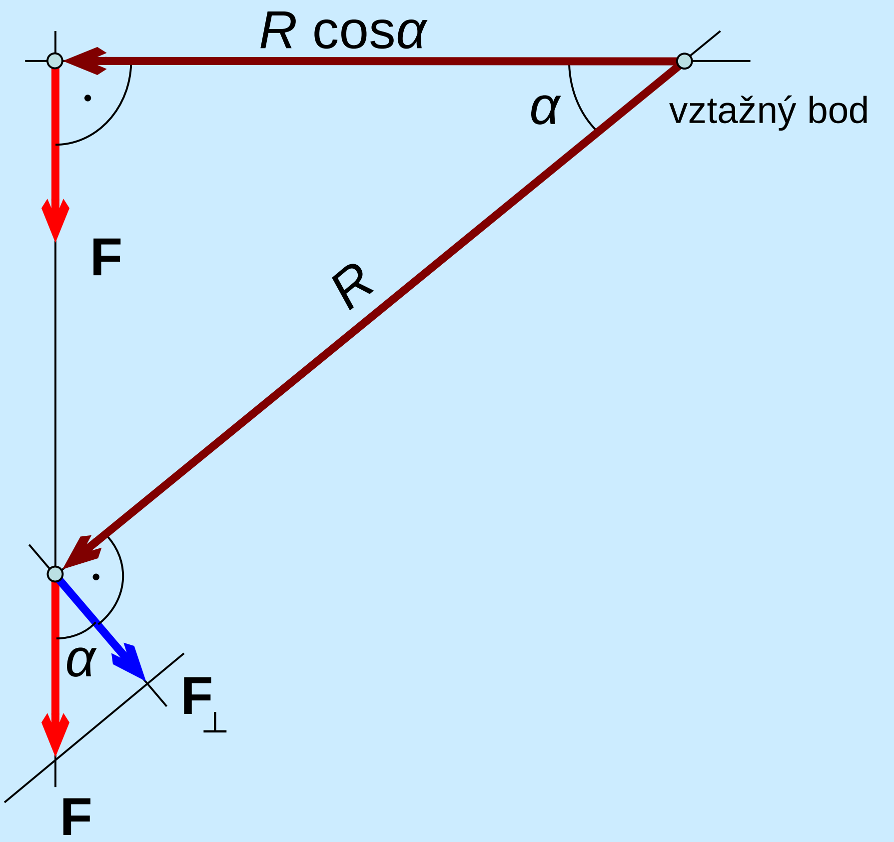
Rameno krát kolmá složka síly:

$$M = RF_{\perp} = RF\cos\alpha$$

Kolmé rameno krát posunutá síla:

$$M = (R\cos\alpha)\,F = RF\cos\alpha$$

Vyjde totéž, jde o různé geometrické
Interpretace téhož momentu.
Posunutím síly ve směru působení
se totiž moment síly nezmění.



Vysokoškolský přístup:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

nejelegantnější a nejúspornější, oba popsané přístupy obsaženy v jediném vzorečku, moment zde obdržíme přímo jako vektor, musíme však vědět, co je vektorový součin.
V kartézských souřadnicích: $(M_x, M_y, M_z) = (R_y F_z - R_z F_y, R_z F_x - R_x F_z, R_x F_y - R_y F_x)$

Pohybové rovnice pro tuhé těleso

Pohybová rovnice pro

translační (posuvný) pohyb: $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ **rotační** (otáčivý) pohyb: $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = J\boldsymbol{\varepsilon}$

Translační pohyb probíhá podle stejného zákona jako je to u hmotného bodu, zrychlení se zde však vztahuje na těžiště, které z hlediska translačního pohybu nahrazuje těleso.
V rovnici pro otáčivý pohyb se objevuje nová veličina *J*, ***moment setrvačnosti*** jako koeficient úměrnosti mezi celkovým momentem síly působícím na tuhé těleso a úhlovým zrychlením. Představuje setrvačné účinky tělesa vzhledem k rotaci. Závisí na hmotnosti tělesa a na jeho prostorovém rozložení hmoty v tělese. Čím je hmotný element dál od osy otáčení, tím více přispívá k momentu setrvačnosti a to s kvadrátem vzdálenosti os osy.

Moment setrvačnosti hmotného bodu, otáčejícího se kolem osy ve vzdálenosti *R*: $J = mR^2$

Momenty setrvačnosti pro některá tělesa:

koule $J = \frac{2}{5} mR^2$

válec $J = \frac{1}{2} mR^2$

tyč délky *l*, osa otáčení prochází

těžištěm: $J = \frac{1}{12} ml^2$ koncem tyče: $J = \frac{1}{3} ml^2$

Podmínky rovnováhy

Rovnováhu tuhého tělesa definují dvě podmínky:

1. **Suma všech vnějších sil působících na těleso je nulová,**
2. **suma momentů od všech vnějších sil působících na těleso je nulová.**

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$$

Protože se jedná o dvě vektorové rovnice, jde ve skutečnosti o soustavu 6 skalárních rovnic. Podmínky nezávisí na volbě vztažného bodu pro výpočet momentů sil. Vztažný bod lze proto volit s ohledem na co nejjednodušší výpočet dané úlohy. Volíme ho například v bodech, kde je nejvíc sil (pak jejich momenty budou nulové, s ohledem na nulové rameno) nebo tak, aby ramena vyšla kolmá k silám.

Dosadíme-li podmínky rovnováhy do předchozích pohybových rovnic, obdržíme (kinematický) důsledek podmínek rovnováhy, $\mathbf{a} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, což znamená, že těleso v rovnováze nemůže konat ani translační ani rotační zrychlený pohyb. Těžiště tělesa však se však může pohybovat rovnoměrně přímočaře a těleso může rotovat s konstantní úhlovou rychlostí. Vždy pak existuje inerciální vztažná soustava, ve které bude těžiště tělesa v klidu, stále však může těleso rotovat. Vztažná soustava, ve které těleso ani nerotuje, však je již obecně neinerciální (rotuje spolu s tělesem) a musíme pak do pohybových rovnic doplnit odstředivé síly.

Translační a rotační pohyby

Analogie mezi veličinami popisujícími translační a rotační pohyby tuhého tělesa.

Veličiny:

translace	**rotace**
dráha … s (m)	úhel … φ (–, rad)
rychlost … $\mathbf{v}$ (m/s)	úhlová rychlost … $\boldsymbol{\omega}$ (1/s; rad/s)
zrychlení … $\mathbf{a}$ (m/s^2)	úhlové zrychlení … $\boldsymbol{\varepsilon}$ (1/s^2; rad/s^2)
síla … $\mathbf{F}$ (N)	moment síly … $\mathbf{M}$ (N.m)
hmotnost … m (kg)	moment setrvačnosti … J (kg.m^2)
hybnost … $\mathbf{p}$ (kg.m/s)	moment hybnosti … $\mathbf{b}$ (kg.m^2/s)

Vzorce:

rovnoměrný pohyb, $a = 0$: $s = vt + s_0$	$\varepsilon = 0$: $\varphi = \omega t + \varphi_0$
rovn. zrychlený pohyb, a = konst: $v = at + v_0$; $s = ½\, at^2 + v_0 t + s_0$	ε = konst: $\omega = \varepsilon t + \omega_0$; $\varphi = ½\, \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\mathbf{M} = J\boldsymbol{\varepsilon}$
$E_k = ½\, mv^2$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$E_k = ½\, J\omega^2$; $\mathbf{b} = J\boldsymbol{\omega}$

Příklady – mechanika tuhého tělesa

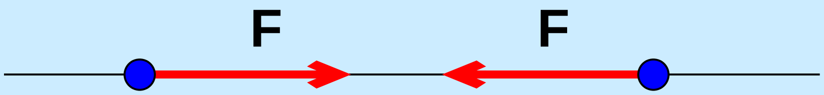
3 řešených příkladů:
http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_resene_3.pdf
Příklady jsou spíše vysokoškolské, používají integrální počet, doporučuji začít příkladem třetím, který je na aplikaci pohybové rovnice pro otáčivý pohyb.

24 neřešených příkladů:
http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_neresene_2.pdf

Gravitace

Newtonův gravitační zákon: určuje sílu, kterou se přitahují dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2, nacházejících se ve vzdálenosti r :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



kde koeficient úměrnosti *G* je gravitační konstanta. Ve většině zahraničních učebnic a ve vědeckých publikacích se ale značí jako *G*. Její hodnota se určuje experimentálně a je velmi malá, navíc, vzhledem k obtížnosti jejího měření, je známa s poměrně malou relativní přesností.

Gravitační síla je vždy přitažlivá a míří ve směru spojnice obou těles.

Hodnota gravitační konstanty: $\kappa = 6{,}674\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, její relativní přesnost: 5×10^{-5}.

Podrobnější informace o gravitační konstantě naleznete v článku
V. Kaizr: Měření gravitační konstanty, http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004_s2.html,
a její aktuální hodnotu na stránkách NIST, http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg.

Gravitační síla působící mezi dvěma studenty, sedícími vedle sebe, vychází (zaokrouhleme jejich hmotnosti na $m = 10^2$ kg a vzdálenost na $r = 1$ m) $F = 6{,}7\times10^{-7}$ N, což odpovídá tíze tělesa o hmotnosti přibližně 7 mg, což je asi 100 zrnek písku. Proto vzájemné gravitační síly těles, která nás obklopují, nepozorujeme. Jedinou výjimkou je gravitace Země.

Intenzita gravitačního pole

Definice intenzity gravitačního pole:

je to gravitační síla působící na jednotkovou hmotnost, $\mathbf{K} = \dfrac{\mathbf{F}}{m}$ fyzikální rozměr je m s^{-2}.

Intenzita gravitačního pole v okolí hmotného bodu o hmotnosti M resp. v okolí sféricky symetricky rozložené hmoty téže hmotnosti:

$$K = \frac{F}{m} = \frac{1}{m} G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{M}{r^2}$$

Intenzita gravitačního pole v malé výšce nad povrchem země, kde lze gravitační sílu považovat za konstantní, rovnou $F = mg$:

$$K = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

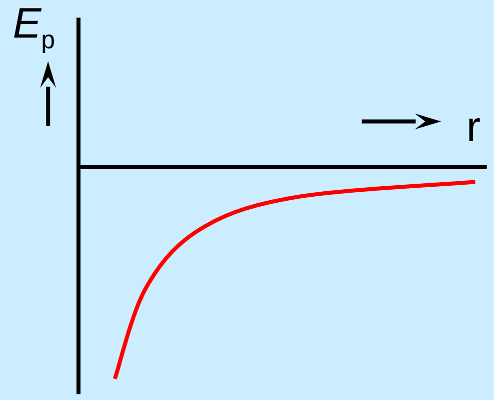
Všimněte si, že intenzita tíhového pole je rovna jejímu zrychlení g, proto se častěji používá termínu zrychlení místo intenzita.

Gravitační potenciální energie

K odvození použijeme již dříve zmíněného vztahu mezi sílou a potenciální energií hmotného bodu (viz potenciální energie):

$$E_{\mathrm{P}}(r) = -\int F(r)\,\mathrm{d}r = -\int -G\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r = GmM\int \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = -G\frac{mM}{r} + K$$

Integrační konstanta *K* se často volí nulová, čemuž odpovídá volba nulová potenciální energie v nekonečnu. Připomeňme, že potenciální energie je určena jednoznačně až na konstantu, jejíž volbou volíme vztažný bod, vzhledem k němuž potenciální energii vztahujeme.



Všimněte si také, že za gravitační sílu jsme dosadili sílu ze vzorce pro Newtonův gravitační zákon, ovšem se záporným znaménkem. Je to proto, protože radiální souřadnice *r* míří od hmotného bodu (resp. od počátku souřadnicové soustavy), kdežto gravitační síla je přitažlivá a míří v opačném směru. Aby vyšla potenciální energie správně, je nutno vždy zohledňovat také směr síly.

Kmitavý pohyb, oscilátory, kyvadla

Témata:

- Kmitání mechanického oscilátoru.
- Kinematika harmonického pohybu.
- Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu.
- Skládání kmitů.
- Dynamika harmonického kmitání. Kyvadlo.
- Nucené kmity, rezonance.

Doplňková literatura:

- http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/prednasky/kmitani_mechanika.pdf

Kinematika kmitavého pohybu

skládání kmitů

- V rovnoběžných směrech http://www.aldebaran.cz/applets/fy_razy/start.html
- V kolmých směrech http://www.aldebaran.cz/applets/fy_lissa/start.html

energie lineárního harmonického oscilátoru,
tlumené kmity (koeficient útlumu, časová konstanta, pod- a nadkritické tlumení,
vynucené kmity, rezonance, rezonanční křivka, rezonanční frekvence.

Simulace:

- http://demonstrations.wolfram.com/HarmonicOscillation/ Kinematika LHO
- http://demonstrations.wolfram.com/MassOnASpringSimpleHarmonicOscillator/ LHO

Příklady:

- Zkumavka plovoucí na hladině,
- Tunel skrz Zemi.