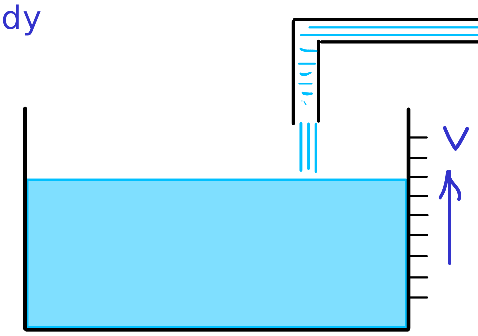
Intergální počet

- Definice neurčitého integrálu, geometrický a fyzikální význam
- Vztah integrálu a derivace
- Tabulkové integrály
- Věty o integrálu
- Určitý integrál
- Aplikace, příklady

$\leftarrow$ Q průtok $\frac{m^3}{s}$

Motivace:



$$V = Qt$$

Platí jen když bude průtok Q konstantní.

Kdyby se průtok měnil, uměli bychom ho vyjádřit pomocí změny objemu:

$$Q = \frac{dV}{dt}.$$

My však chceme opačné vyjádření a to objem V(t), známe-li průtok Q(t). Taková operace se nazývá integrál a značí se

$$V(t) = \int \underbrace{Q(t)}_{\text{integrand}} \, d\underbrace{t}_{\text{proměnná}} .$$

integrační znaménko

Motivace:

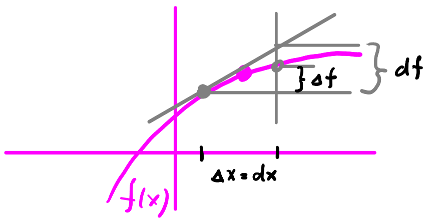
$$Q(t) = \frac{dV}{dt}$$

dV ... přírůstek objemu (matematicky diferenciál)

dt ... přírůstek času

V okolí nějakého bodu na funkci Q(t) můžeme napsat (lze formalizovat matematicky ale v tomto kurzu to přijměte pouze intuitivně):

$Q(t)\,dt = dV$ lze chápat $Q(t)\,\Delta t = \Delta V$

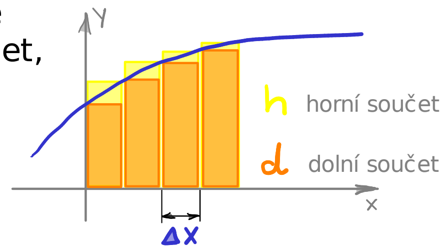


$$V = \sum \Delta V = \sum \underbrace{Q(t)}\,\underbrace{\Delta t}$$

$$\int Q(t)\,dt$$

Fromálně lze zavést různé druhy integrálů, $\underbrace{\text{Riemannův}}$, Lebesqueův, ...

Riemannův integrál se zavádí jako číslo I, když provedeme limitu nerovnosti d < I < h, kde d a h je dolní a horní součet, což jse součet ploch obdélníků počítaných z minim a z maximm funkce na intervalu osy x vytýčené daným obdélníkem. Limita se provádí pro Δx → 0.



Vztah derivace a integrálu:

$f(x)$ $\qquad F(x) = \int f(x)\,dx$, pak platí $f(x) = \frac{dF}{dx}$

Například: Zvolíme $F(x) = 2x^2$, pak $f(x) = 4x$

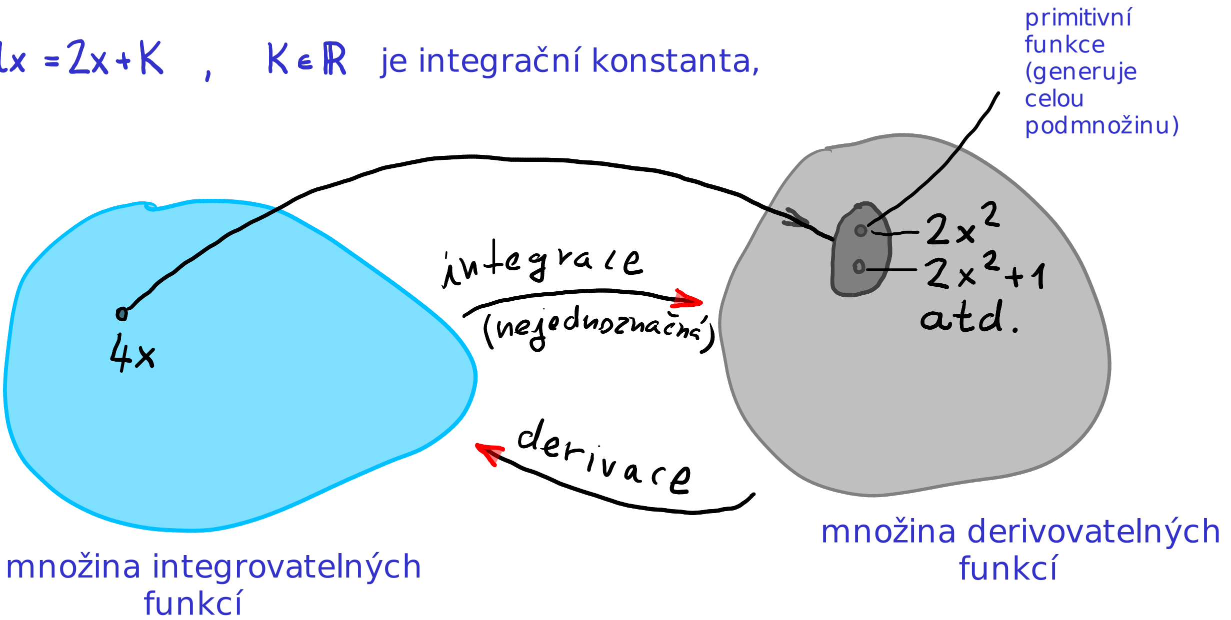
$$\int 4x\,dx = 2x^2$$

ale také pro $F(x) = 2x^2 + 1$ dostaneme také $f(x) = F'(x) = 4x$, což je totéž.

Lze tedy také napsat, že $\int 4x^2 dx = 2x^2 + 1$ je také správný výsledek.

Integrál je určen jednoznačně až na konstantu. Obecně napíšeme

$\int 4x\,dx = 2x + K$, $K \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta,



Tabulkové integrály

$f(x)$	$F(x)$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{R}, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	
e^x	e^x	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

$$x^n \xrightarrow{\text{derivování}} \underbrace{nx^{n-1}}_{x^m} \quad / : n \qquad m = n-1$$

$$\xleftarrow{\text{integrování}}$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Vlastnosti integrálů, věty o integrálech

Integrál je lineární operace (totéž jako u derivací):

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

Lze říct obecně, že integrál i derivace jsou lineární operace.
Operace je zobrazení z množiny funkcí do množiny funkcí.

O je lineární operace, pokud splňuje vlastnosti

$$\mathcal{O}(f(x)+g(x)) = \mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) \qquad \text{aditivita}$$

$$\mathcal{O}(a f(x)) = a\,\mathcal{O}(f(x)) \qquad \text{linearita}$$

Speciální případy: $\mathcal{O} = \frac{d}{dx}$ ... derivace, $\mathcal{O} = \int \dots\, dx$ ... integrál.

Věta o substituci (nebudeme formulovat matematicky rigorózně, ukážeme na příkladech):

$$\int \sqrt{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = t \\ (x+1)'dx = dt \\ 1\,dx = dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + K = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + K =$$

tabulkový integrál (ten první v pořadí)

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + K$$

zpětné dosazení substituce

zkouška: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + K\right)' = \cancel{\frac{2}{3}}\left(\cancel{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}-1} + 0\right) = \sqrt{x+1}$ ✓

Další příklad:

dt

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$f'(x)\,dx = df \;/ : dx$ (ale

$f'(x) = \frac{df}{dx}$

$$= \frac{t^{-\frac{1}{2}-1}}{-\frac{1}{2}-1} + K = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + K$$

Příklad:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t^2+1} =$$

tabulkový integrál (ten poslední)

$$= -\operatorname{arctg} t + K = \underline{\underline{-\operatorname{arctg}\cos x + K}}$$

Příklad:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ f(x) = t \\ f'(x)\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + K = \ln|f(x)| + K$$

tabulkový integrál (druhý v pořadí)

Je praktické si pamatovat, že pokud je integrand ve tvaru zlomku, v němž čitatel je derivace jmenovatele, je výsledný integrál logaritmus absolutní hodnoty jmenovatele.

Příklad na předchozí příklad:

$$\underbrace{\int \frac{3x+1}{x^2+2}}_{\text{racionální lomenná funkce}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2+2}\,dx = \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}_{\ln(x^2+1)} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{\operatorname{arctg} x} + K =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + K$$

Substituce je velice mocný postup ale bohužel nefunguje tak univerzálně, jako například věta o derivaci složené funkce. Někdy musíme hledat správnou substituci metodou pokus omyl nebo postupně. Substituce vedoucí k výsledku nemusí vždy existovat. Příklady, v nichž metoda substituce selhává:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{nebo} \quad \int e^{x^2}\,dx\,.$$

Potřebujeme další metody, umožňující výpočet dalšch integrálů:

Per partez (po částech):

$$\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \qquad \Big/ \int dx$$

$$f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Integrace per partez: $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx\,.$

Příklad: $\int (x^2+5)e^{2x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \text{per partez} & \\ f = x^2+5 & f' = 2x \\ g' = e^{2x} & g = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x^2+5}{2}e^{2x} - \int x e^{2x}\,dx =$

$fg' \qquad fg \qquad -fg'$

$$= \left| \begin{array}{ll} f = x & f' = 1 \\ g' = e^{2x} & g = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2+5}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+5-x+\frac{1}{2}\right) + K$$

Uvedené dvě metody umožňují počítat mnoho integrálů. Nelze s nimi spočítat (pravděpodobně, dokázat to neumím ale není mi to známo) integrály typu

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$$

Řeší se pomocí tzv. parciálních neboli částečných zlomků, v tomto kurzu se nebudeme učit.

Určitý integrál:

Liší se od předchozího integrálu, který od teď budeme nazývat neurčitý, tím, že je jednoznačně určen a není to funkce ale číslo. Matematicky se operand, který funkci zobrazí na číslo nazývá funkcionál.

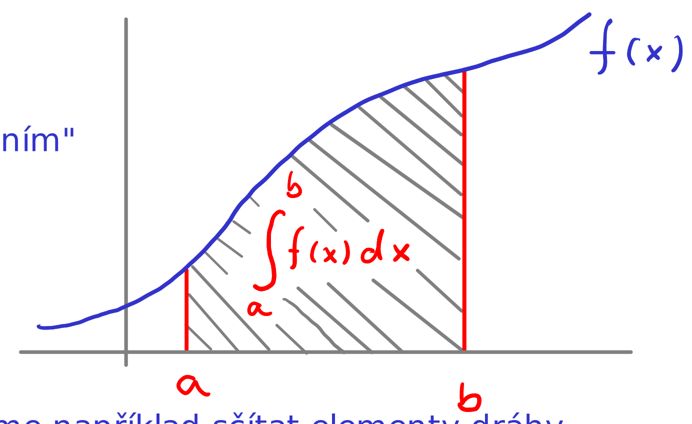
$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{čteme jako "integrál od a do b"}} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{Newtonův vzorec pro výpočet určitého integrálu}}$$

kde F(x) je primitivní funkce ke g(x)

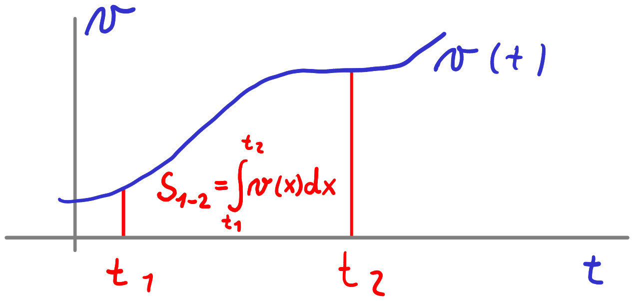
$$F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

praktické označení, zejména u komplikované F(x)

Geometrická interpretace určitého integrálu:
Je to plocha pod křivkou.

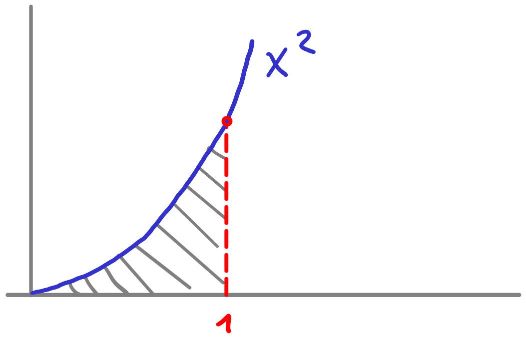


Fyzikálně je to veličina, která vzniká "nasčítáváním" integrandu po malých úsecích:



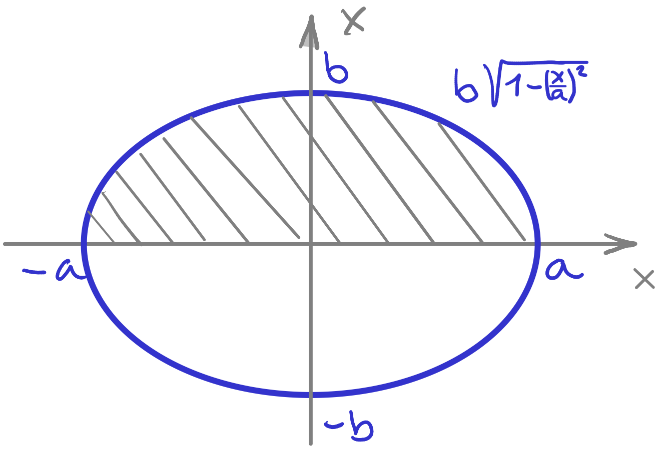
Můžeme například sčítat elementy dráhy po vteřinách z rychlosti v dané vteřině.

Příklad: Spočítejte plochu vymezenou parabolou x^2 , osou x a přímkou x = 1.



$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Příklad: Spočítejte plochu elipsy
s poloosami a, b.



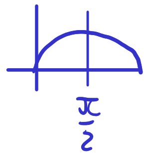
$$S = \underset{\uparrow}{2b}\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} 4b\int_0^a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx =$$

sudá funkce

elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y = \pm b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$



$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin u \\ \frac{dx}{a} = \cos u\,du \end{array} \right| = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos u}\ \underbrace{a\cos u\,du}_{dx} =$$

$$u \in \left\langle 0, \arcsin\left(\underbrace{\tfrac{a}{a}}_{1}\right)\right\rangle$$

$$= 4ba\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\cos 2u\right)du \quad \frac{\pi}{4} \quad = 4ab\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$= \cancel{4}ab\left(\frac{\pi}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}} + \underbrace{\cancel{\frac{\sin\pi}{2}}}_{0} - \cancel{\frac{0}{2\cdot 4}} - \underbrace{\cancel{\frac{\sin 0}{2}}}_{0}\right) = \underline{\underline{\pi ab}}$$

zacekm@fel.cvut.cz