Diferenciální počet, derivace funkce

Limita funkce

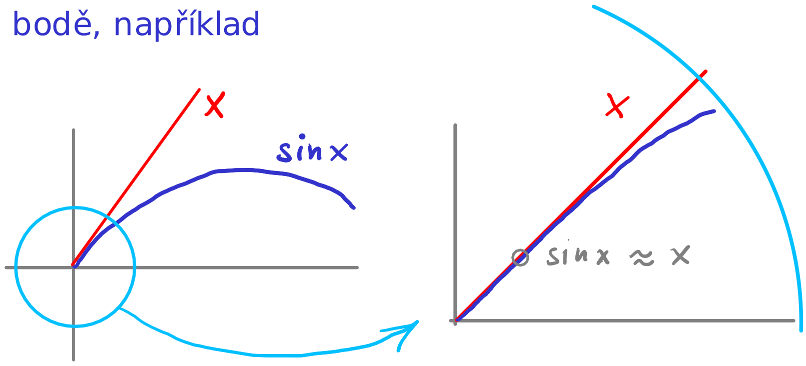
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x}{3x^4+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\underbrace{\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}}_{\to 0}}{3+\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}} = \frac{1}{x}$$

principy týž jako u posloupností

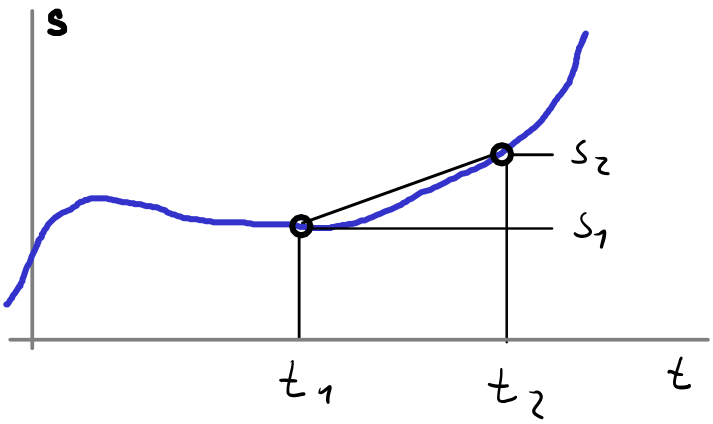
Nově je zde limita v konečném bodě, například

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

tabulková limita, odvozuje se z definice limity



Motivace k zavedení derivace:



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ průměrná rychlost

okamžitá rychlost: $\Delta t \to 0$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s_2-s_1}{\Delta t} = \lim_{t_2\to t_1} \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t_1+\Delta t)-s(t_1)}{\Delta t}$$

ekvivalentní zápisy

derivace zprava: $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

derivace zleva: $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Pokud se derivace zleva a zprava v témže bodě rovnají, říkáme, že funkce má v bodě x derivaci a značíme:

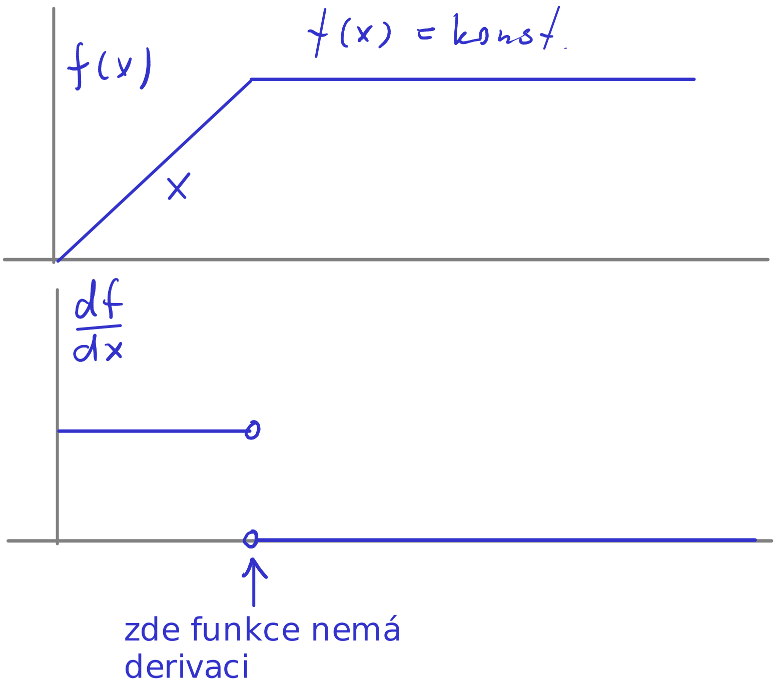
$$f'(x) = \frac{df}{dx} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivace funkce v bodě.

Význam: rychlost změny funkce v daném bodě.

Pokud má funkce v každém bodě derivaci, bod x derivace můžeme vzít jako proměnnou a dostaneme derivaci jako funkci.

Příklady:



Fyzikální příklad:
Okamžitá rychlost je derivace polohy jako funkce času.

Tabulkové derivace:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Příklady:

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(x^0)' = 0\,x^{-1} = 0$$

derivace konstanty, plyne z derivace mocniny

Namátkou odvodíme některé tabulkové derivace:

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots - \cancel{x^n}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}\frac{\Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} + \dots}_{\to 0}\right)$$

$= nx^{n-1}$ Odpovídá tabulkové derivaci mocniny a to jsme chtěli dokázat.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$\sin(\alpha+\beta) = \dots$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin x\frac{\cos\Delta x}{\Delta x} + \underbrace{\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}}_{\to 1} - \frac{\sin x}{\Delta x}\right) = \cos x + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\sin x\left(\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right)}_{\to 0} = \cos x$$

$$\cos\Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\Delta x^4}{4!} - \dots$$

Věty o derivacích:

1. Derivace je lineární operace: $(af(x))' = a(f(x))'$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

2. Derivace složené funkce: $[f(g(x))]' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

Příklad: $(3\sin 4x) = 3(\sin 4x)' = 3\cos 4x \cdot 4 = 12\cos 4x$

linearita — derivace složené funkce

použili jsme: $f(g) = \sin g \quad g(x) = 4x \quad \frac{df}{dg} = \cos g \quad \frac{dg}{dx} = \frac{d(4x)}{dx} = 4$

3. Derivace součinu: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Příklad: $(\sin x\cdot\cos x)' = \cos x\cdot\cos x + \sin x(-\sin x) =$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

4. Derivace podílu: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Příklad: $(tg\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. Derivace inverzní funkce: $y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y)$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(y(x))'} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(f'(x))(y)}$$

Příklady:

$$(\ln x)' \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

věta o derivaci f^{-1}

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\cos \arcsin x} =$$

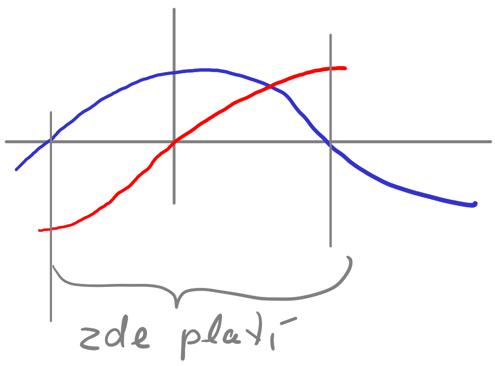
$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y = \arcsin x$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$



$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

Příklad: $\left(\sqrt{\frac{3x\sin x - 1}{x^2+1}}\right)' = \left(\frac{3x\sin x - 1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x\sin x - 1}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3x\sin x - 1}{x^2+1}\right)' =$$

$$= \sqrt{\frac{3x\sin x - 1}{x^2+1}} \; \frac{(3x\sin x - 1)'(x^2+1) - (3x\sin x - 1)(x^2-1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$\uparrow$

derivace podílu

$$= \sqrt{\frac{3x\sin x - 1}{x^2+1}} \; \frac{(3\sin x - 3\cos x)(x^2+1) - 2x(3x\sin x - 1)}{(x^2+1)^2}$$

Aplikace diferenciálního počtu, příklad:

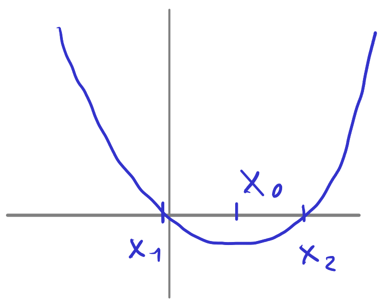
Zjistěte, v jakém bodě má polynom $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ vrchol.

~ Bez diferencilálního počtu lze řešit úpravou na úplný čtverec. $= 3\underbrace{(x - x_0)}_{\tilde{x}}{}^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posun v } y}}{d} =$

$= 3\tilde{x} + d$

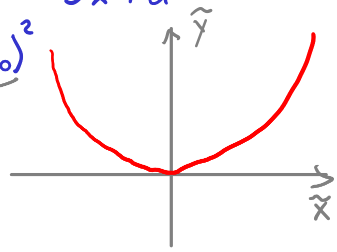
Lze řešit také takto:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{D}\right) = -\frac{b}{2a}$$



x_0 vrchol (posun v x)

$\underbrace{y - y_0}_{\tilde{y}} = a(\underbrace{x - x_0}_{\tilde{x}})^2$



Vrchol lze efektivně řešit za pomoci derivace.

$$P'(x) = (3x^2 - 2x + 1)' = 6x - 2 \underset{\uparrow}{=} 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ vrchol}$$

hledáme bod, ve kterém se P(x) nemění,
obecně to jsou stacionární body

zkusme: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{1}{3}$