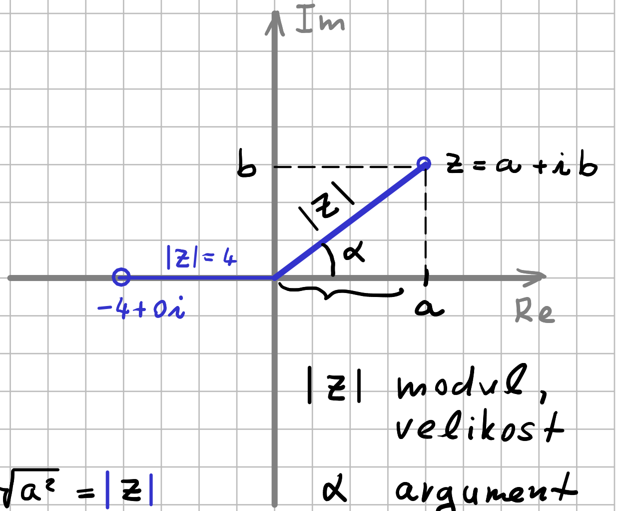
Komplexní čísla - goniometrický a exponenciální tvar

$$z = a + ib = \underbrace{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

goniometrický tvar
komplexního čísla



Transformační vztahy mezi

$$(a, b) \leftrightarrow (|z|, \alpha)$$

$$\begin{cases} a = |z|\cos\alpha \\ b = |z|\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi \end{cases}$$

$\pm\frac{\pi}{2}$ $a = 0$

$k = 0$ I kvadrant tak i IV. kvadrant

$k = 1$ II a III. kvadrant

$k = 2$ IV kvadrant

pokud $b = 0$: $|z| = \sqrt{a^2} = |z|$

| | modul | | abs. hodnota

$|z|$ modul, velikost

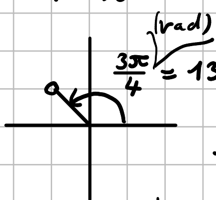
α argument

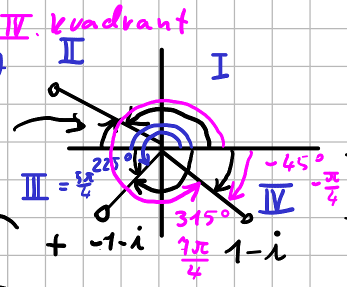
$$\underbrace{\pi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}$$

III. kv.

$\alpha \in (-\pi, \pi)$

$-1 + i$

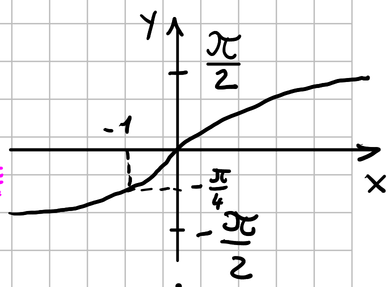




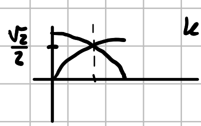
$1\,\text{rad} = \frac{360}{2\pi}$ stupňů

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$



když $\alpha = \frac{\pi}{4}$

V programových knihovnách matematických funkcí existuje kromě arctg(x) také arctg2(x, y), která řeší volbu parametru k podle kvadrantu. Předem je známo, zda $\alpha \in (-\pi, \pi)$ nebo $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$

Označení: $z = a + ib$

$\operatorname{Re}(z) = a$	reálná část
$\operatorname{Im}(z) = b$	imaginární část
$\lvert z \rvert$	modul, velikost
$\arg z = \alpha$	argument komplexního čísla (je to ale množina $\alpha_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)
$\operatorname{Arg} z = \alpha$	hlavní hodnota argumentu, předem se ví, zda

$\alpha \in (-\pi, \pi)$ nebo $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$

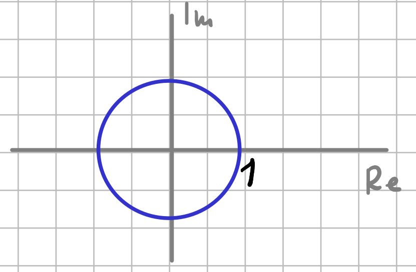
Počítání s komplexními čísly v gonimetrickém tvaru:

$$(a+ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$$

$$[\underbrace{|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)}_{\text{jednotkové komplexní číslo}}]^2 = |z|^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = |z|^2(\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= |z|^2(\underbrace{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}_{\cos 2\alpha} + i\cdot\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha}) =$$

$$= |z|^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$



Zobecnění (bez újmy na obecnosti ukážeme pro jednotkové číslo):

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)}$$

Moivreova věta

Zkusme takovýto pokus: $z = a + ib = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$z^m z^n = |z|^m |z|^n(\cos m\alpha + i\sin m\alpha)(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) =$$

$$= |z|^{m+n}(\underbrace{\cos m\alpha\cdot\cos n\alpha - \sin m\alpha\sin n\alpha}_{\cos(m\alpha + n\alpha)} + i\underbrace{(\cos m\alpha\sin n\alpha + \cos n\alpha\sin m\alpha)}_{\sin(m\alpha + n\alpha)})$$

$$z_1\cdot z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$\cos\alpha + i\sin\alpha$ $\cos\beta + i\sin\beta$

Obecně toto platí i pro jakýkoliv reálný argument.

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Argumenty se [sčítají, odčítají], pokud komplexní čísla [násobíme, dělíme]. Takovou vlastnost ale mají exponenty.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{z\bar{z}}$$

vektor v rovině

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

Takové zobecnění bylo v matematice provedeno, nazává se exponenciální tvar:

$$z = a + ib = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \underbrace{e^{i\alpha}}$$

exponenciální tvar
komplexního čísla

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$x = i\alpha$$

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - i\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + i\frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

$$= \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\text{kde} \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

Ilustrace že exponenciální
tvar je správný, ale jen
pokud umíme rozvíjet
funkce v mocninné řady.

$$z = a + ib = |z|e^{i\alpha}$$

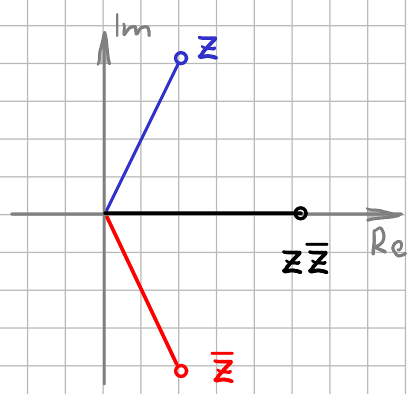
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\underbrace{e^{i\alpha}e^{i\beta}} = |z_1||z_2|e^{i(\alpha+\beta)}$$

Počítáme formálně stejně,
jako u reálných mocnin.

Zajímavost:

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

$$\bar{z} = \underbrace{\cos\alpha - i\sin\alpha}_{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)} = e^{-i\alpha}$$



$$\oplus \quad e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$$

$$\ominus \quad e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$$

$$\longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

vyjádření goniometrických funkcí
pomocí exponenciálních

Odvozování některých vzorců s goniometrickými funkcemi pomocí komplexních čísel:

$z = a + ib = \cos\alpha + i\sin\alpha$

jednotkové

$$z^2 = \begin{cases} (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + i\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \end{cases}$$

porovnáním:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$$

chceme $\cos 5\alpha$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \binom{5}{2}$$

$$z^5 = \begin{cases} \cos^5\alpha + \dots \\ \cos 5\alpha + i\sin 5x \end{cases}$$

Porovnáním

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
$\boxed{1}$ 5 $\boxed{10}$ 10 $\boxed{5}$ 1

$$1\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$

$$z_1 z_2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$$

Porovnáním:

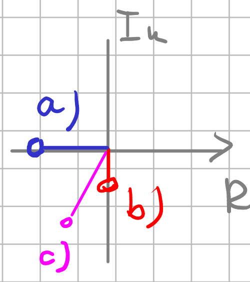
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Příklady:

7.9 Určete exponenciáltní tvar komplexního čísla:

a) -5 b) $-2i$ c) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

a)

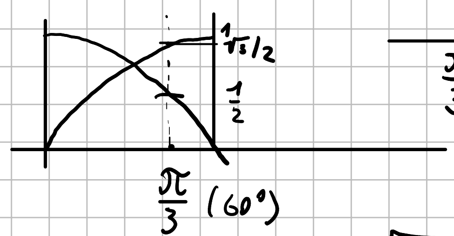


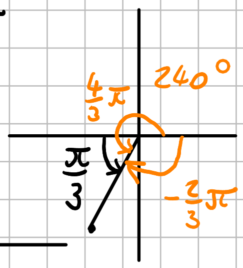
$\alpha = \pi$ $\qquad z = 5e^{i\pi}$

b) $\alpha = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$

$z = \sqrt{0^2+2^2}\, e^{-\frac{i\pi}{2}} = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$

c) $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + \pi$





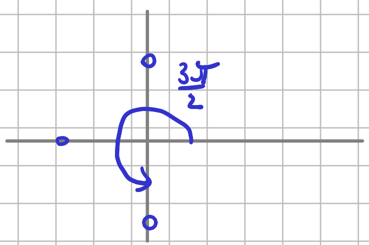
$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+3}}{2} = 1$

$z = e^{-\frac{2}{3}i\pi} = e^{\frac{4}{3}i\pi}$

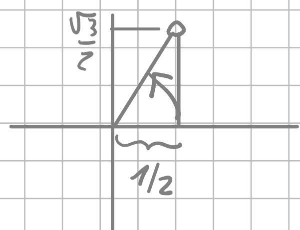
Napište algebraický tvar komplexního čísla

a) $\frac{5}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$, b) $e^{\frac{i\pi}{3}}$ c) $4e^{i\pi}$

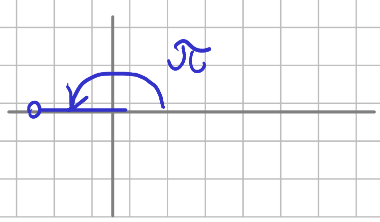
a) $\frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\frac{5}{2}$



b) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$



c) $4e^{i\pi} = 4(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}) = -4$

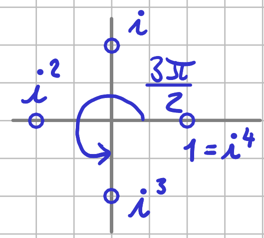


3. spočítejte $i^2,\ i^3$ atd.

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$i^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}}} = e^{i\pi} = -1$$

$$i^3 = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$$



10. a) Řešte rovnici $z^4 = 16$ v komplexním oboru

Pozorování: V reálném oboru máme dva výsledky, +2 a -2.
V komplexním oboru budou další.

$$z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16\, e^{i(0+2k\pi)}} = \sqrt[4]{16}\, e^{\frac{i\,2k\pi}{4}} =$$

- $k=0$: $2e^0 = 2$
- $k=1$: $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $k=2$: $2e^{i\pi} = -2$
- $k=3$: $2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

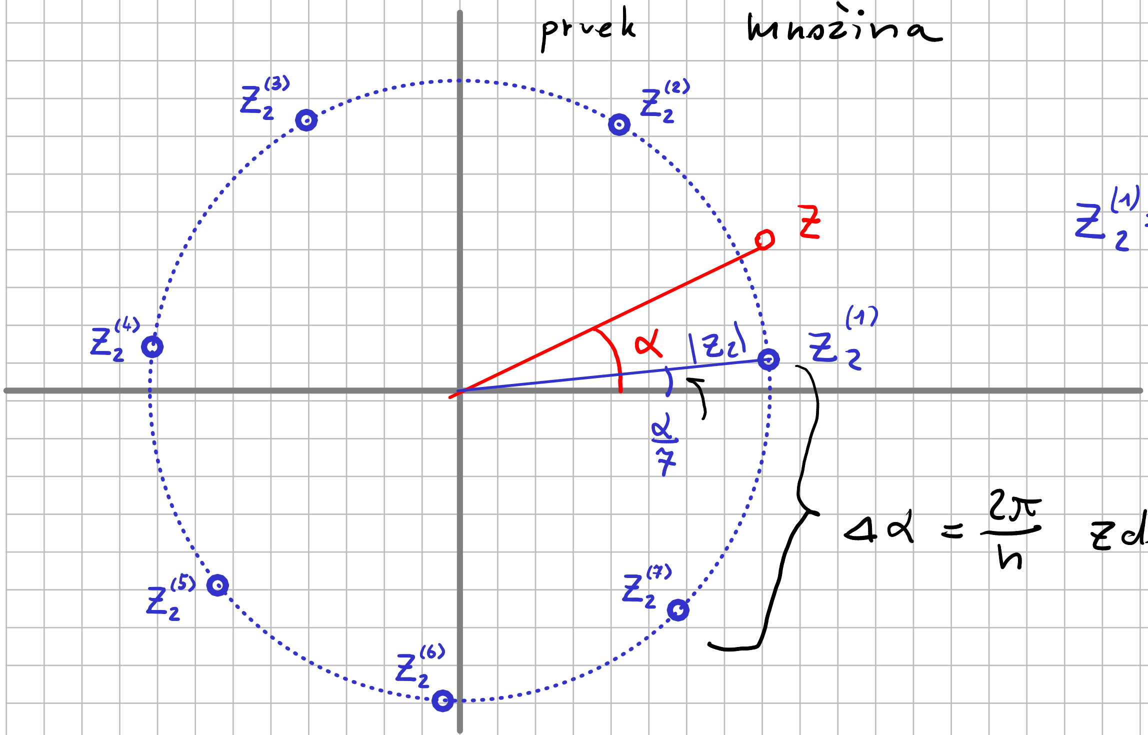
formálně odmocníme
druhou stranu rovnice

Zobecnění:

n-tá odmocnina v komplexním oboru je množina n obecně komplexních čísel.

Můžeme například napsat $-2 \in \sqrt[4]{16}$

prvek — množina



$$z_2^{(1)} = \sqrt[7]{z}$$

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad \text{zde} \quad \frac{2\pi}{7}$$

b) $\sqrt[6]{1-i}$

Podobně, dopočítejte si, výsledky v učebním textu.