Komplexní čísla

přirozená čísla + operace sčítání $a + x = b \rightarrow x = b - a$
operace násobení a inverzní úloha -> nutnost zavést racionální čísla
operace mocnina a inverzní úloha -> nutnost zavést iracionální čísla
Poslední co zbývalo: Vyřešit obecně inverzní úlohu typu $x^m = -n \quad m, n \in \mathbb{N}$
například pro m sudá.

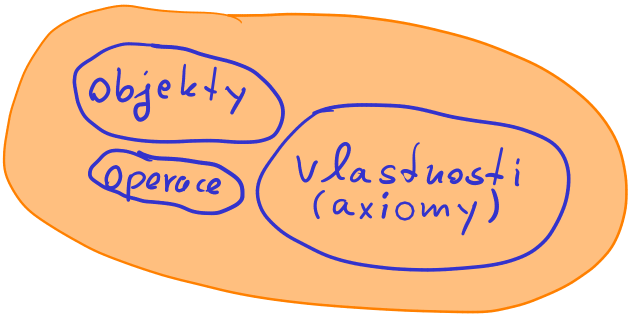
Vede na odmocninu ze záporného čísla $\sqrt[m]{-n}$, kterou nedokáže vyjádřit reálným číslem.

Definice komplexního čísla:

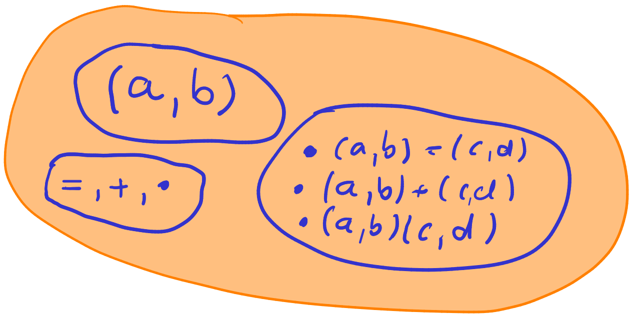
Uspořádanou dvojici reálných čísel (*a*, b) s operacemi =, +, x nazýváme komplexním číslem, splňuje-li následující vlastnosti:

- $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
- $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Abstraktní algebra:



Komplexní čísla:



Nyní prověříme některé vlastnosti násobení komplexních čísel (protože rovnost a součet jsou definovány formálně stejně jako u aritmetických vektorů):

$$(a, 0)(b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

Pozorování: Násobení komplexních čísel s nenulovou pouze první složkou se chová stejně jako reálná čísla. Lze je tedy brát jako zobecnění reálných čísel.

$$a = (a, 0).$$

$$(0, a)(0, b) = (-ab, 0)$$

speciální případ *a* = *b*:

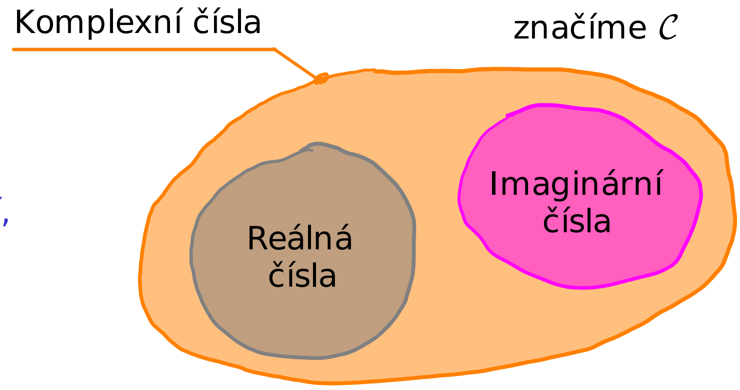
viz předchozí pozorování

$$(0, a)(0, a) = (0, a)^2 = (-a^2, 0) \stackrel{\downarrow}{=} -a^2$$

Toto je úplně nový jev, v reálných číslech nevídaný a sice umocněním nějakého čísla s novými vlastnostmi na sudou mocninu, dostaneme záporné číslo.

Komplexní čísla typu (0, *a*) nazýváme imaginární.

Reálná čísla doplněná o imaginární, nazýváme komplexní.



(a, b)

- b: imaginární část komplexního čísla
- a: reálná část komplexního čísla

Algebraický tvar komplexního čísla:

$$(a,b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiom pro sčítání}}}{=} (a,0)+(0,b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiom pro násobení}}}{=} \underbrace{(1,0)}_{1}\underbrace{(a,0)}_{a} + \underbrace{(0,1)}_{i}\underbrace{(b,0)}_{b} = \underbrace{a+bi}_{\text{algebraický tvar komplexního čísla}}$$

$$(0,1)(b,0) = (0,b)$$

i ... imaginární jednotka

vlastnosti: $i \cdot i = i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Algebraický tvar komplexního čísla je vhodný pro "praktické" počítání.

Příklady:

Mějme komplexní čísla $a = 3+2i$, $b = 4-i$.
Najděte součet, rozdíl, součin, podíl a druhou mocninu.

$$a+b = 3+4+i(2-1) = \underline{\underline{7+i}}$$

$$ab = (3+2i)(4-i) = 12-3i+8i-2i^2 \underset{\substack{\uparrow \\ i^2=-1}}{=} 12+2+i(8-3) = \underline{\underline{14+5i}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3+2i}{4-i} = \frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i} = \frac{12-2+i(8+3)}{4\cdot4+1\cdot1+i\cancel{(4-4)}} = \frac{10+11i}{17} = \frac{1}{17}(10+11i) = \underline{\underline{\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i}}$$

Komplexně sdružené číslo k číslu $a+bi$ nazýváme číslo $a-bi$.

Označujeme $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$.

Vlastnosti komplexně sdruženýách čísel:

$$z+\bar{z} = a+ib+a-ib = 2a$$
$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2+i\cancel{(ab-ab)} = a^2+b^2$$

Podobá se vzorci $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Tedy dělíme tak, že zlomek rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem.

$$\frac{a}{b} = \frac{a\bar{b}}{b\bar{b}} = \frac{3+2i}{4-i} = \frac{3\cdot4-2+i(3+8)}{4^2+1^2} = \frac{10+11i}{17}$$

Vyšlo stejně.

napíšeme rovnou ze vzorce a^2+b^2

Zpět k příkladu: $a = 3+2i$

$$a^2 = (3+2i)(3+2i) = 3^2+2\cdot3\cdot(2i)+\underbrace{(2i)^2}_{-4} = 9-4+12i = 5+12i$$

$\oplus$

Zajímavé jsou mocniny imaginární jednotky:

$$i^3 = i\,i^2 = -i$$
$$i^2 = -1$$

$$i^4 = i^{2\cdot2} = (-1)(-1) = 1$$

(to je zajímavé, protože máme další řešení rovnice

$$x^4 = 1 \qquad x = \sqrt[4]{1} = 1$$

v $\mathbb{C}$ má další řešení, i, protože $i^4 = 1$)

$$i^5 = \underbrace{\cancel{i^4}}_{1}\,i = i$$

$$i^{41} = i^{40+1} = i^{40}\cdot i = \underbrace{\cancel{i^{4\cdot10}}}_{(i^4)^{10} = 1^{10} = 1}\cdot i = i$$

$$\boxed{\text{obecně} \quad i^m = i^{4n+z} = i^z = \begin{cases} 1 & z=0 \\ i & z=1 \\ -1 & z=2 \\ -i & z=3 \end{cases}}$$

Zajímavost:

$$(ai)^2 = aiai = a^2i^2 = -a^2 \rightarrow (ai)^2 = -\underbrace{b}_{>0}$$

ozn. $a^2 = b$

Toto u reálných čísel nikdy nenastává.

$$\underbrace{\sqrt{(ai)^2}}_{ai} = \sqrt{-b}$$

číselný příklad:

$$\sqrt{-4} \quad -\sqrt{-1}\,\sqrt{4} \quad -i\cdot2 - 2i$$

lze tedy odmocnit záporné číslo.

Od teď můžeme řešit rovnice typu $x^2 = -16$

řešení: $x = \sqrt{-16} = i\cdot4 = \underline{\underline{4i}}$

Také si všimněte, že v komplexním oboru má každá kvadratická rovnice řešení:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \underbrace{\sqrt{D}}\right) = \begin{cases} e & \text{pokud } D \geq 0 \\ ie & \text{pokud } D < 0 \end{cases}$$

e pokud $D \geq 0$ Řešení v reálném oboru.

ie pokud $D < 0$ Zde má rovnice řešení jako dvojice komplexně sdružených čísel.