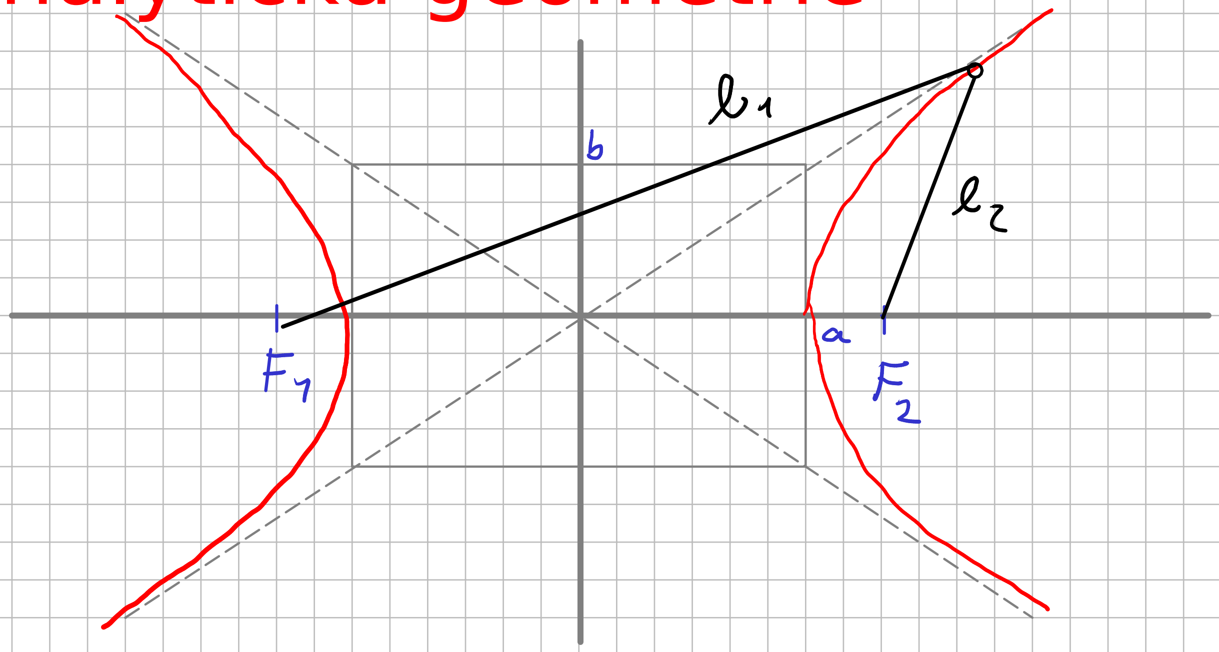
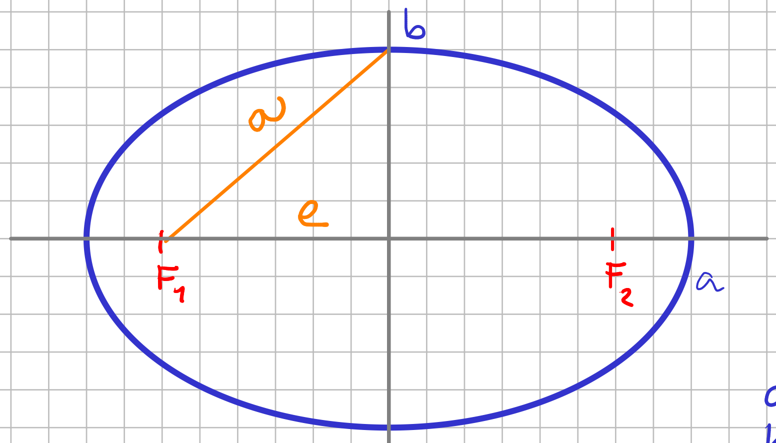
Analytická geometrie

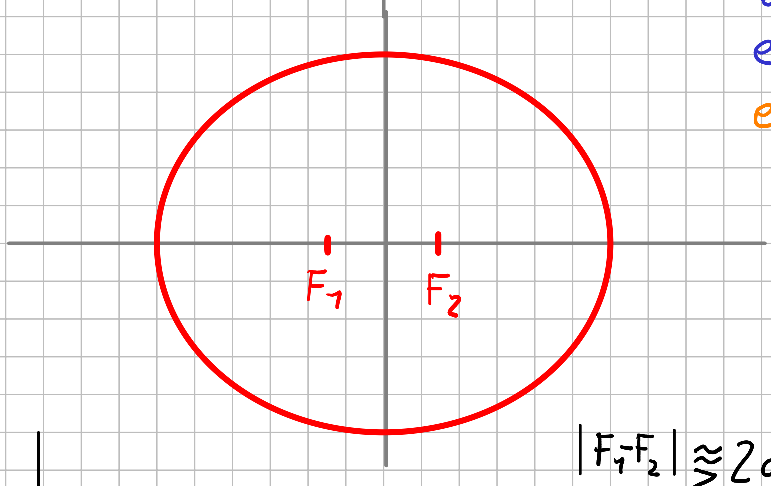


$$\boxed{|l_1 - l_2| = konst}$$

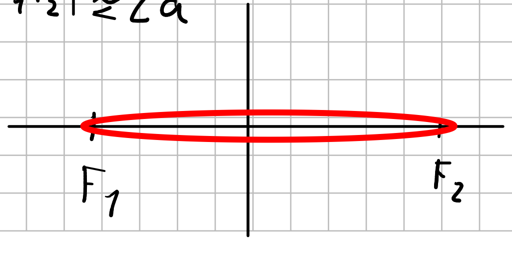
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$a = 8$
$b = 5$
$e = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$



$|F_1 - F_2| \lesssim 2a$

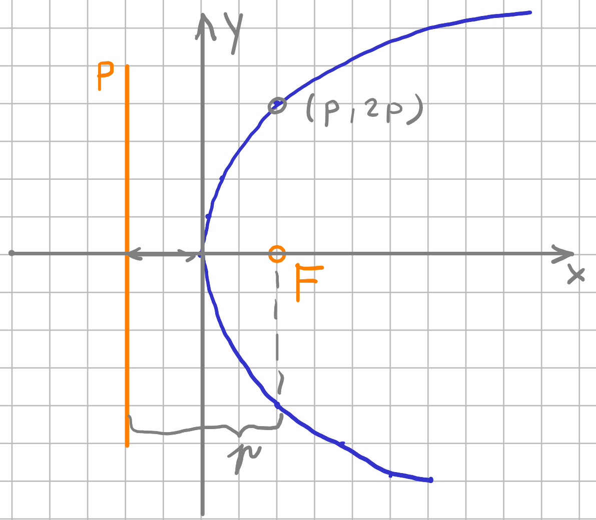


$|F_1 - F_2| \gtrsim 2a$

Elipsa téměř degeneruje na úsečku

Parabola:

Definice paraboly: Parabola je množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevně zadaného bodu a od přímky, bod neleží na přímce.
Bod se nazývá ohnisko (F), přímka se nazývá řídicí přímka (P).



$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + d$$

my má opačné $x \leftrightarrow y$

$$x = ay^2$$

$$x = \frac{p}{2}; \quad y = p$$

$$\frac{p}{2} = ap^2 \longrightarrow a = \frac{1}{2p}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2p} y^2 \qquad p \neq 0}$$

p... parametr

Parabola s posunutým středem: $$\boxed{x - S_x = \frac{1}{2p}(y - S_y)^2}$$

nebo $$\boxed{2p(x - S_x) = (y - S_y)^2, \ p \neq 0}$$

Rovnice tečen ke kružnici, elipse, parabole a hyperbole:

	kuželosečka	tečna $(x_T, y_T) = T$
V základní poloze	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\frac{x\,x_T}{a^2} \pm \frac{y\,y_T}{a^2} = 1$
	$y^2 = 2px$	$y\,y_T = p(x + x_T)$
S posunutým středem	$\frac{(x - S_x)^2}{a^2} \pm \frac{(y - S_y)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - S_x)(x_T - S_x)}{a^2} \pm \frac{(y - S_y)(y_T - S_y)}{b} = 1$
	$(y - S_y)^2 = 2p(x - S_x)$	$(y - S_y)(y_T - S_y) = p(x + x_T - 2S_x)$

Obecná rovnice kuželosečky

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \qquad a, b \neq 0 \text{ zároveň} \qquad (a \cdot b \neq 0)}$$

$c = 0$: případ posuné ale neotočené kuželosečky

V tomto případě najdeme S_x a S_y úpravou na úplný čtverec.

Příklady:

1. Je dán trojúhelník 4ABC s vrcholy A = [4, 6] , B = [−4, 0] , C = [−1, −4] .
   a) Najděte rovnice všech jeho stran.
   b) Najděte rovnici těžnice jdoucí vrcholem C.
   c) Najděte rovnici výšky spuštěné z vrcholu A .

$A = (4,6) \quad B = (-4,0)$

rovnice přímky

$\vec{s} = A - B = (8,6)$

parametrický tvar:

$X = A + \vec{s}t$

$(x,y) = (A_x, A_y) + (s_x, s_y)t$

$x = A_x + s_x t$

$y = A_y + s_y t$

číselně $x = 4 + 8t$

$y = 6 + 6t \qquad t \in \mathbb{R}$

základní rovnice: $t = \frac{1}{8}(x-4)$ dosadíme do R_2

$y = 6 + \frac{6}{8}(x-4)$

$-6x + 8y - 24 = 0$

$$3x + 4y - 12 = 0$$

Jiný postup:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

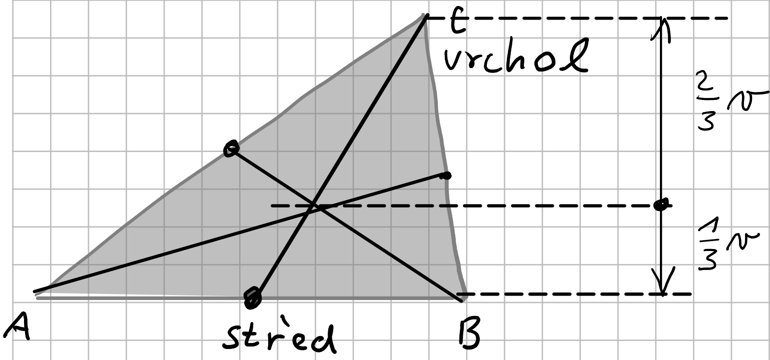
A: $\frac{4}{p} + \frac{6}{q} = 1$

B: $\frac{-4}{p} + \cancel{\frac{0}{q}} = 1$

$p = -4$

$-1 + \frac{6}{q} = 1 \rightarrow q = 3$

$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1 \rightarrow 3x - 4x + 12 = 0$



Střed A-B:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{(4,6)+(-4,0)}{2} = (0,3)$$

Těžnici budeme hledat ve tvaru ax + by + 1 = 0.

střed: $0a + 3b + 1 = 0$

C: $-1a - 4b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0a + 3b + 1 = 0 \\ -1a - 4b + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b = -\frac{1}{3} \\ -a + \frac{4}{3} + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{7}{3} \end{array}$$

$$7x - by + 3 = 0 \qquad x \in \langle -1, 0 \rangle$$

c) směrnice výšky: Rovnici strany AB již máme, 3x - 4y +12 = 0.

$$\vec{n} = \vec{s_v} = (3, -4)$$

Výška je pak rovnice úsečky se směrovým vektorem s a bodem C.

$$x = -1 + 3t$$
$$y = -4 - 4t$$

↑ bod C ↑ směrnice $\vec{s_v}$

$$\rightarrow t = -\frac{1}{4}(y+4) = -\frac{y}{4} - 1$$

$$x = -1 - \frac{3}{4}y - 3$$

$$4x + 3y + 12 = 0$$

Průnik výšky se základnou AB:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y + 12 = 0 \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array} \oplus \quad 25x + 84 = 0$$

$$x = -\frac{84}{25}$$

Řešení: $4x + 3y + 12 = 0, \; x \in \langle -\frac{84}{25}, -1 \rangle$

Je dána elipsa 4x**2 + 25y**2 − 24x − 100y + 36 = 0 .
Určete souřadnice jejího středu, délky poloos a.
Určete souřadnice jejího středu, délky poloos a excentricitu.

$$\boxed{4x^2 + 25y^2 - 24x - 100y + 36 = 0}$$

$$4x^2 - 24x = 4\underbrace{(x^2 - 6x)}$$

upravíme na úplný čtverec

$$x^2 - \underbrace{6x}_{2\cdot 3} + \underbrace{9}_{3^2} - 9 = (x-3)^2 - 9$$

$$25y^2 - 100 = 25\underbrace{(y^2 - 4y)}$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 = (y-2)^2 - 4$$

Původní rovnice tedy bude: $4(x-3)^2 - 9\cdot 4 + 25(y-2)^2 - 4\cdot 25 + 36 = 0$

$$4(x-3)^2 + 25(y-2)^2 = \cancel{36} + 4\cdot 25 - \cancel{36} \qquad / : 4\cdot 25$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$\left(\frac{x-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = 1$$

elipsa se středem (3, 2)
a poloosami a = 5 a b = 2.

excentricita: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$