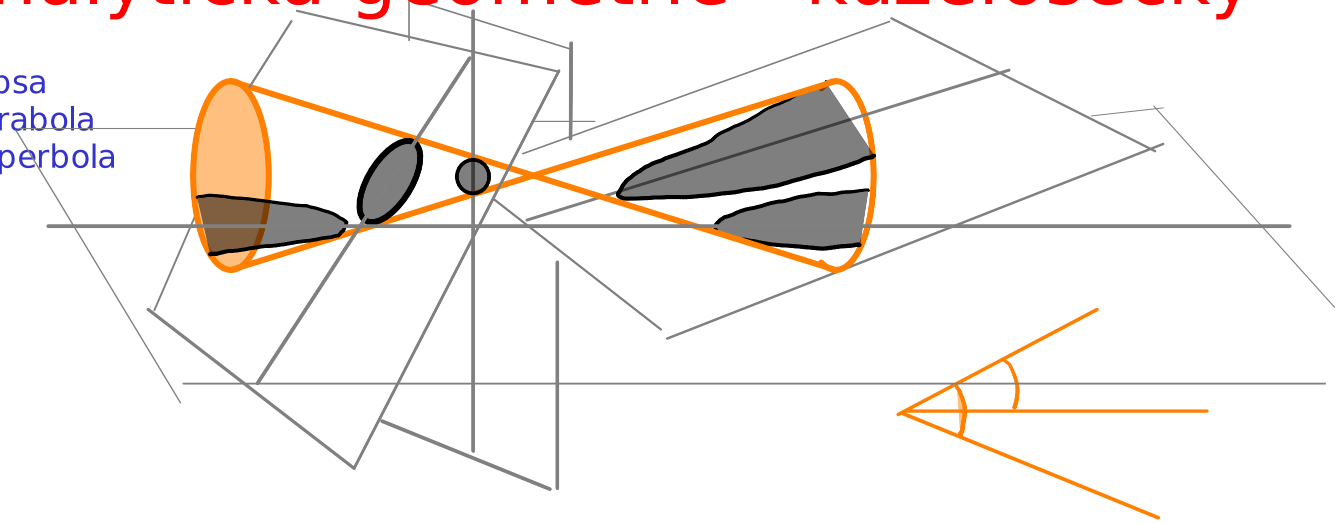
záznam je výjimečně bez revize a neupravený, upravím až se k tomu dostanu, časem aktualizujte.

Analytická geometrie - kuželosečky

* elipsa
* parabola
* hyperbola



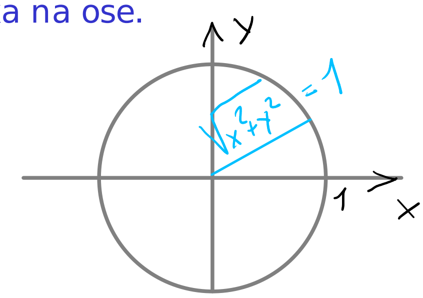
Společná rovnice pro kružnici, elipsu a hyperbolu

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$

Dělení koeficienty a a b představuje změnu měřítka na ose.

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$$

jednotková kružnice se středem v počátku



Případ a = b = R

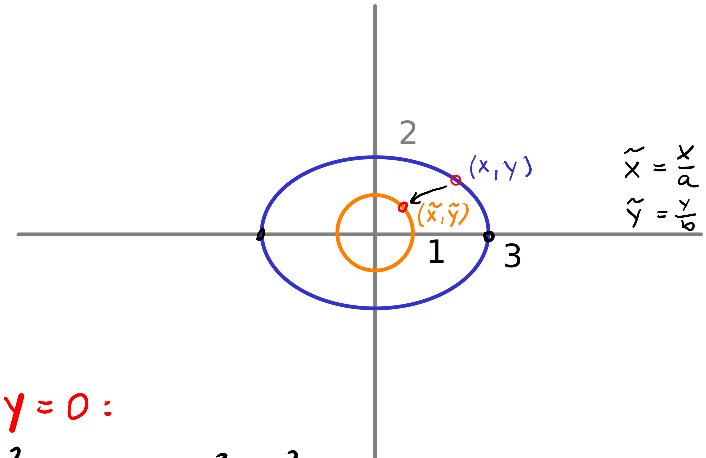
$$x^2 + y^2 = R^2$$

kružnice se středem v počátku o poloměru R

Případ různých a a b, znaménko +:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$$



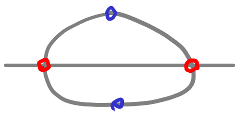
$\tilde{x} = \frac{x}{a}$

$\tilde{y} = \frac{y}{b}$

Ilustrace některých bodů:

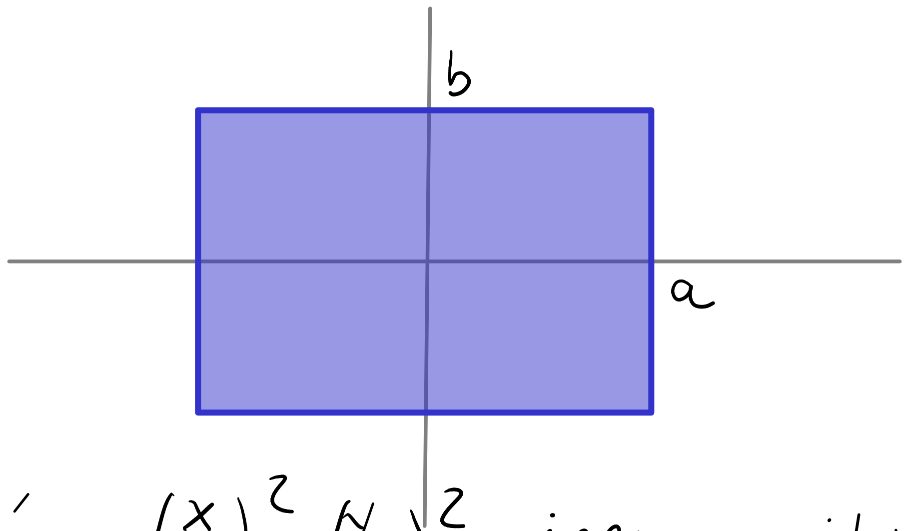
- $y = 0$:

$\frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 = a^2 \rightarrow x = \pm a$



- $x = 0$

$\frac{y}{b} = 1 \rightarrow y = \pm b$



Řešení $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$ jsou uvnitř $\square$ 2b, 2a

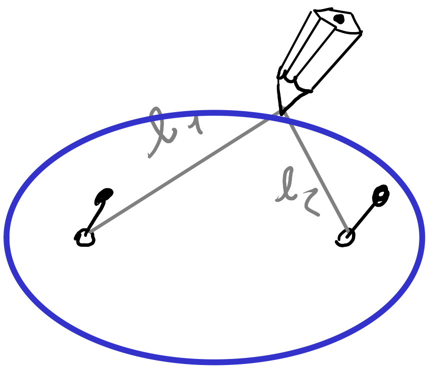
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2=1 \qquad x = \underbrace{a\underbrace{\sqrt{1-\frac{y_0^2}{b^2}}}_{<1}}_{<a}$$

y_0 malé

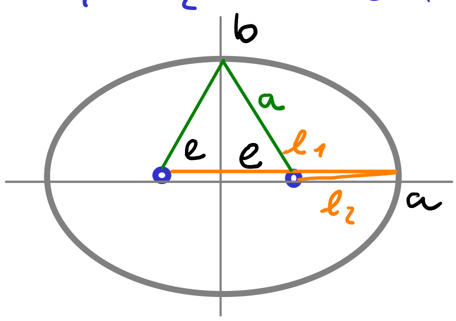
a, b valká a malá poloosa elipsy

Analytická definice elipsy se středem v počátku v základní poloze: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

"Neanalytická" definice elipsy: Elipsa je množina bodů, která má stejný součet vzdálenosti od dvou pevně zadaných bodů. Tyto body se nazývají ohniska.



$l_1 + l_2 = konst.$



Planeta:
 perihelium: a-e
 afelium: a+e,
 střední vzdálenost: r_s = a

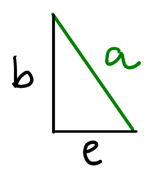
e … excentricita

$l_1+l_2 = (a+\cancel{e}) + (a-\cancel{e}) = a$

$l_1 = l_2 = 2l = 2a$

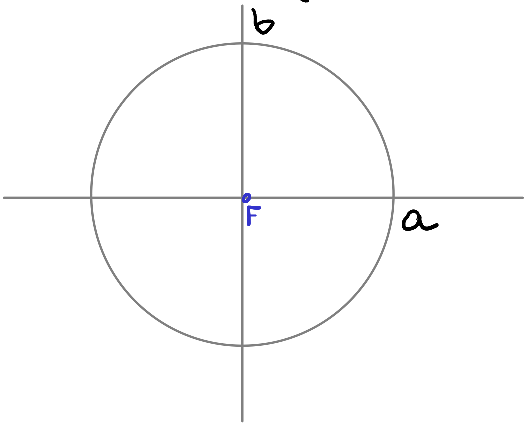
$a^2 = b^2 + e^2$

$e = \sqrt{a^2+b^2}$



Země má excentricitu zhruba $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{1}{60}$ ε ... numerická excentricita

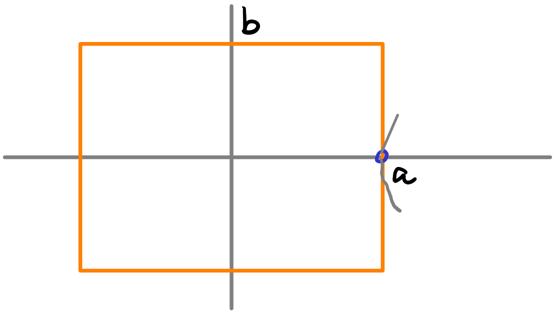
Lze ukázat $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{a}\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right) = 1 - \underbrace{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}_{\approx 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{1}{7200}$



Hyperboly:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Lze podobně ukázat , že všechna řešení budou vně obdélníka <-a, a>x<-b, b>:



$$\frac{x^2}{a^2} - 0 = 1$$

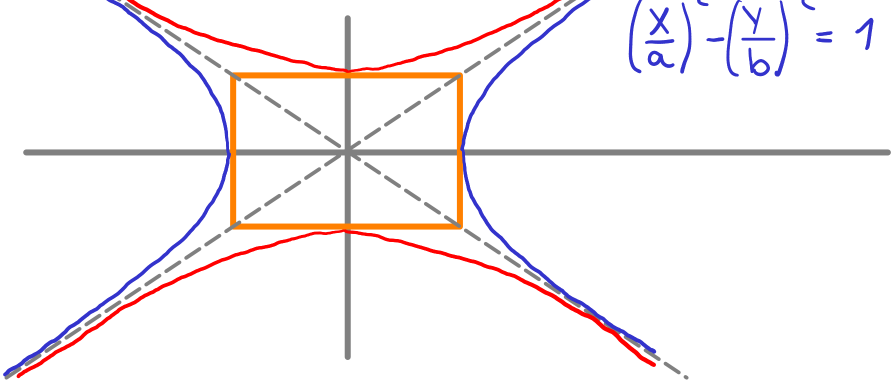
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \underbrace{1 + \frac{y_0^2}{b^2}}_{>1}$$

y_0 „malé" ve smyslu $y \ll b$

x je $> a$

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

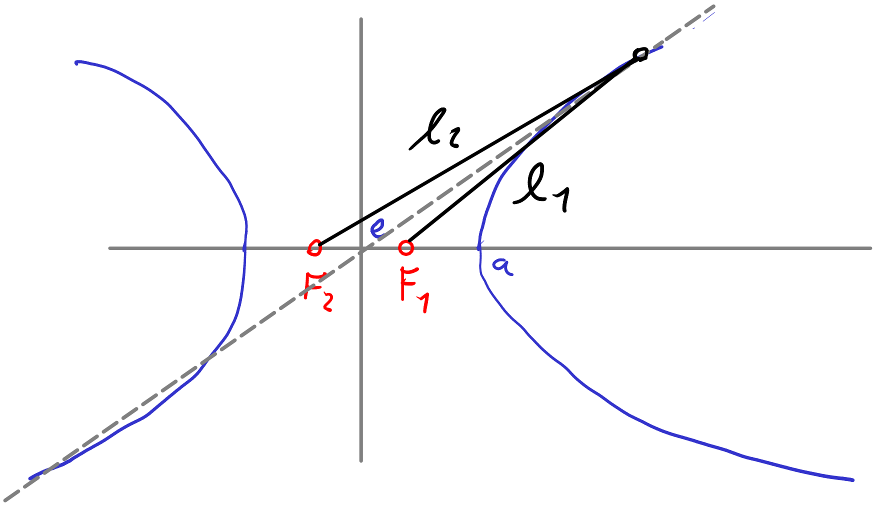
Směrnice asymptot jsou $\pm \frac{b}{a}$

Ukážeme, že když x >> a a y >> b, že řešením budou šedé čáry na obrázku, nazývané asymptoty.

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}_{\gg 1} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad /\sqrt{\ } \quad \rightarrow \quad \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b} \quad \rightarrow \quad \underbrace{bx \pm ay = 0}$$

speciální případ přímek procházejících počátkem

"Neanalytická" definice hyperboly: Hyperpoba je množina bodů, která má konstantní rozdíl vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů nazývaných ohnisky.

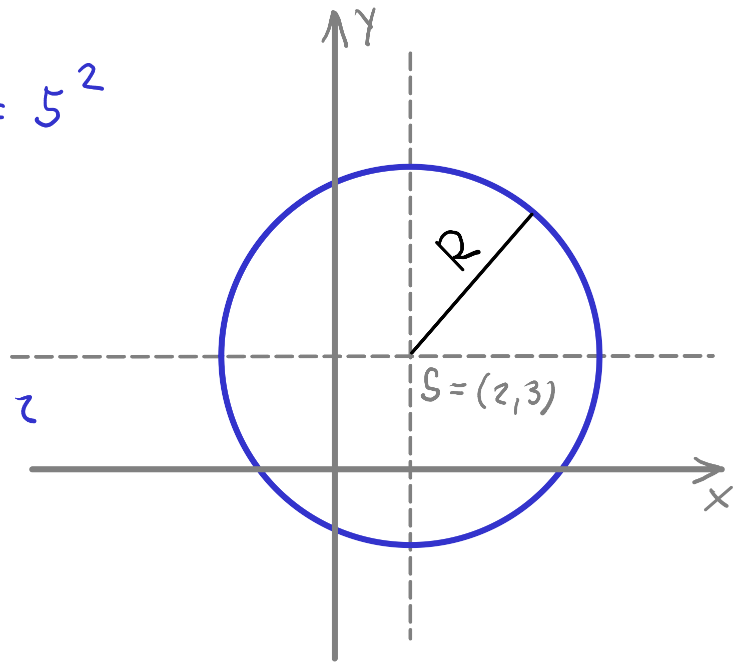


$$l_2 - l_1 = \text{konst.}$$

Kuželosečky s posunutým středem:

Příklad: Kružnice se středem S = (2, 3) a poloměrem 5:

$$\underbrace{(x-2)}_{\tilde{x}}^2 + \underbrace{(y-3)}_{\tilde{y}}^2 = 5^2$$



Obecně:

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 = R^2$$

Elipsa:

$$\left(\frac{x - S_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - S_y}{b}\right)^2 = 1$$