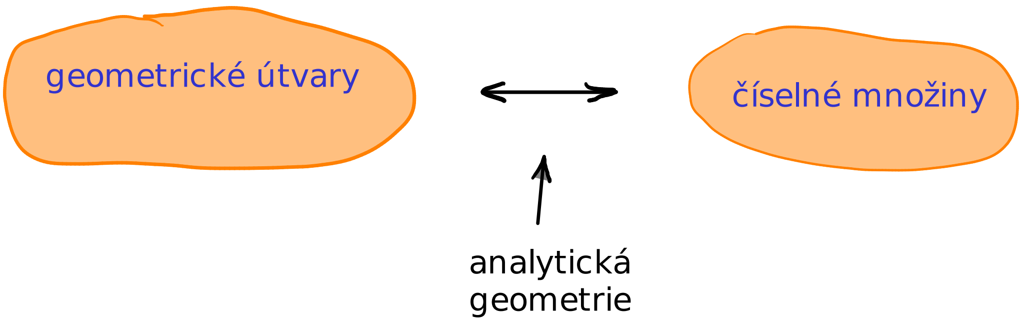
Analytická geometrie (v rovině)

bod

přímka

Základní lineární pojmy,
v "původní" geometrii definovány
intuitivně, v analytické geometrtii
je lze převést na číselné množiny.

obecně:



Bod: A = (x, y)

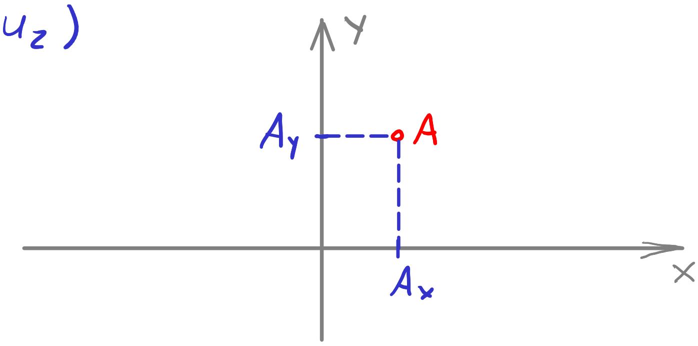
označení: (x, y) běžné ve fyzice, bod je ztotožněn s vektorem jako jeho koncový bod.

A = [x, y], A[x, y]

Budeme značit stejně jako vektor

$\vec{u}=(u_1, u_2)$

přímka $\overleftrightarrow{AB}$
polopřímka $\overleftarrow{AB}$
úsečka $\overline{AB}$



Přímka můžeme zadat různými způsoby:

a) rovnicí $\boxed{ax + by + c = 0 \quad a, b \neq 0 \text{ zároveň}}$ základní tvar rovnice přímky

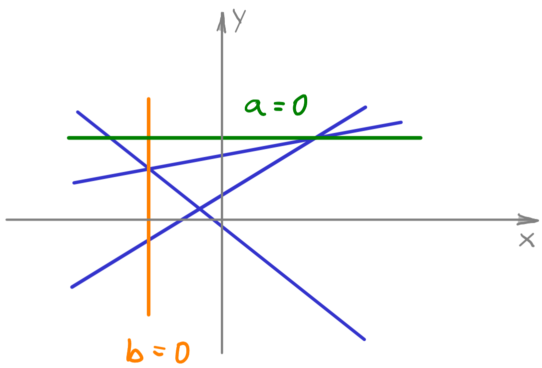
Je to skutečně přímka, pokud b ≠ 0, můžeme vyjádřit $y = -\frac{ax+c}{b} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

neboli $y = k_1 x + q_1$, což je lineární funkce, jejíž graf je přímka.

Analogicky pro a ≠ 0: $x = k_2 y + q_2$
(také přímka, x(y) můžeme chápat
jako inverzní funkci k y(x))

a = 0: by + c = 0 $\rightarrow$ $y = -\frac{c}{b}$

b = 0: ax + c = 0 $\rightarrow$ $x = -\frac{c}{a}$



$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad k_2 = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad k_1 = \frac{1}{k_2}$

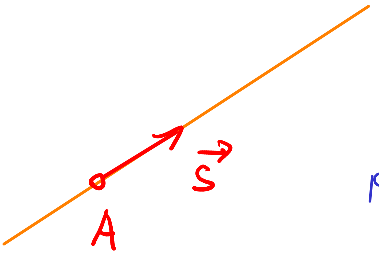
Obecně je řešení rovnice relace mezi body x a y, připomínáme, že relace je zde (libovolná) podmnožina kartézského součinu RxR, což je rovina. Relace má tudíž geometrický význam jakéhokoliv geoetrického útvaru.

b) Přímka zadaná soustavou rovnic:

$$\begin{cases} x = A_x + s_x t \\ y = A_y + s_y t \end{cases} \rightarrow \boxed{X = A + \vec{s}\, t}$$

parametrická rovnice přímky

zadaný bod — směrový vektor — parametr



$t \in \mathbb{R}$ ... přímka

$t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ úsečku

popřípadě (t_1, t_2), $\langle t_1, t_2)$ — různé množiny ale v konstrukční geometrii od sebe nerozlišitelné

Ukážeme, že eliminací t ze soustavy parametrických rovnic b) dostaneme rovnici a):

$$\begin{aligned} x &= A_x + s_x t \quad &/\cdot s_y \\ y &= A_y + s_y t \quad &/\cdot (-s_x) \end{aligned}$$

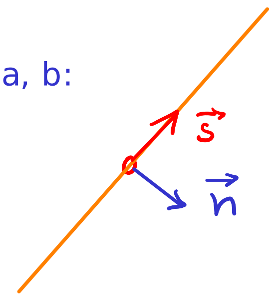
$$\begin{aligned} s_y x &= s_y A_x + s_y s_x t \\ -s_x y &= -s_x A_y - s_x s_y t \end{aligned}$$

$$\underbrace{s_y}_{a} x \underbrace{- s_x}_{b} y = \underbrace{s_y A_x - s_x A_y}_{-c} \rightarrow ax + by + c = 0$$

Jako vedlejší efekt máme vztah směru a koeficientů a, b:

směrový vektor: $\vec{s} = (-b, a)$

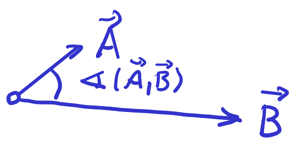
normálový vektor: $\vec{n} = (a, b)$



Že je vztah pro normálový vektor správně je ukázáno v tomto textu níže, po definici skalárního součinu.

Skalární součin:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x, A_y) \cdot (B_x, B_y) = A_x B_x + A_y B_y = A\, B \cos \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$$



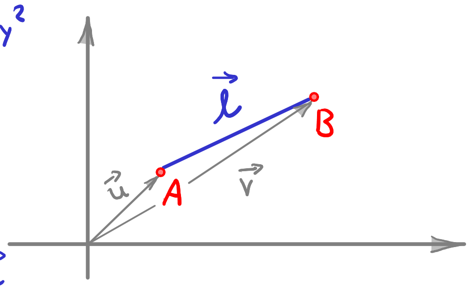
Skalární součin je komutativní a distributivní:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = A^2$$

kde jsme označili jako velikost $A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$



$$\ell = |\overbrace{A-B}^{\vec{\ell}}| = \sqrt{(A_x-B_x)^2 + (A_y-B_y)^2}$$
$$= \sqrt{(A-B)^2} = \sqrt{\underbrace{(A-B)}_{\vec{u}}\cdot\underbrace{(A-B)}_{\vec{v}}}$$

Skalární součin:

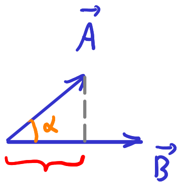
- umožňuje počítat (definovat) velikost vektoru
- umožňuje počítat vzdálenost dvou bodů
- umožňuje spočítat průmět vektoru do směru
- umožňuje počítat úhel mezi dvěma vektory

Průmět vektoru do směru:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha$$

$$P_{A,B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B} = \vec{A}\cdot\vec{b}$$

jednotkový vektor
ve směru B

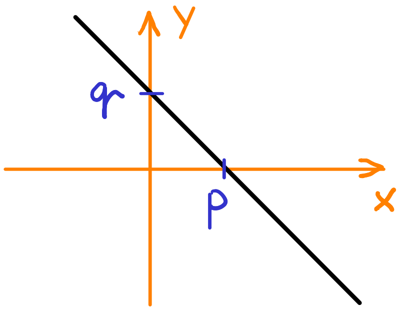


průmět A do směru B

Úhel: $\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$ (lépe s absolutní hodnotou, viz konec tohoto textu)

c) úsekový tvar rovnice přímky:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



$x = 0: \quad y = q$

$y = 0: \quad x = p$

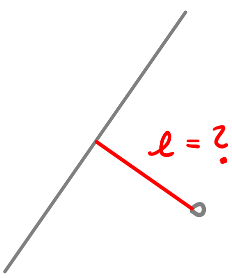
Tvar rovnice přímky se dvěma parametry:

$$ux + vy + 1 = 0$$

Vztahy mezi doby a přímkami:

1. Vzdálenost bodu od přímky:

$$ax + by + c = 0$$



$A = (A_x, A_y)$

Normála $\vec{n} = (a, b)$

$\vec{s}\cdot\vec{n} = (-b, a)\cdot(a, b) = -ba + ab = 0$

Vektory jsou kolmé, $\vec{s} \perp \vec{n}$

Kolmice $X = A + \vec{n}t$ (v param. tvaru)

Hledáme průsečík dvou přímek, druhou jsme si zkonstruovali jako kolmou k zadané a procházející zadaným bodem. Tím najdeme nejbližší bod na přímce k zadanému bodu.

$$ax + by + c = 0 \qquad x = A_x + at \;, \quad y = A_y + bt$$

$$bx - ay = bA_x - A_y$$ (eliminací t)

Máme soustovu dvou rovnic o dvou naznámých.

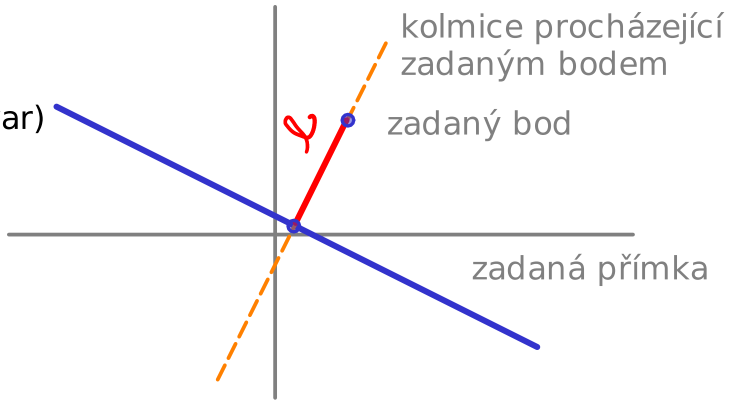
Příklad: Najděte vzdálenost bodu A = (2, 3) od přímky x + 2y =-1 = 0.

$$n = (1, 2)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + t \quad /{-2} \\ y &= 3 + 2t \end{aligned}\right\}$$ kolmice (param. tvar)

$y - 2x = -1$ ... po eliminaci t

$x + 2y = 1$ ... zadaná přímka



$$\left.\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ x + 2y &= 1 \quad / \cdot 2 \end{aligned}\right\}$$ soustava dvou rovnic, jejich řešením je průsečík přímky a kolmice.

$$0 + 5y = 1$$

$$y = \frac{1}{5}$$

$$x = 1 - 2y = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

čímž jsme úlohu převedli na úlohu najít vzdálenost dvou bodů, kterou už umíme:

$$\ell = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + 2^2} = \frac{7}{\sqrt{5}} \approx 3.1$$

Vztah dvou přímek:

$$ax + by + c = 0$$
$$dx + ey + f = 0$$

Evidentně je to soustava dvou rovnic, řešením je průsečík.
Možnosti:

- 1 řešení (různoběžné přímky protínající se v jednom bodě)
- řešení neexistuje (rovnoběžné přímky)
- nekonečně řešení (totožné přímky)

V 1. případě můžeme najít úhel mezi zadanými přímkami

$$\cos\alpha = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{s_1 s_2} = \frac{(-b, a)\cdot(-e, d)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+e^2}} = \frac{be + ad}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+e^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{n_1 n_1} = \frac{(a, b)\cdot(d, e)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+e^2}} = \frac{ad + be}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+e^2}}$$

vidíme, že vyšlo totéž

lze nahradit úhlem mezi normálami, je snáz použitelné, snadněji dosadíme z rovnic a vyhneme se chybám, odpadá přehazování koeficientů a změna znaménka.

Příklad: Vyšetřete vztah mezi přímkami

$$x + 2y - 1 = 0$$
$$3x - y + 4 = 0$$

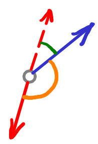
$1R_1 + 2R_2$: $7x + 9 = 0$

$$x = -\frac{9}{7}$$

$$y = 3x + 4 = -\frac{3\cdot 9}{7} + 4 = \frac{-27 + 28}{7} = \frac{1}{7}$$

průsečík $\left(-\frac{9}{7}, \frac{1}{7}\right)$

úhel: $\cos\alpha = \dfrac{1\cdot 3 - 2\cdot 2}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{2}} \approx -\dfrac{1}{9}$



Funkce cosinus vyšla záporná, to je tím, že vektory mají odlišnou orientaci, vezmeme doplněk úhlu do π což je ale ekvivalentní změně znaménka, přesvěčte se (to lze zpaměti pohledem na výsledný výraz), že změníme-li orientaci jednoho vektoru, skalární součin změní znaménko. Stále jde ale o týž přímky, tudíž na znaménku funkce cosinus při určování úhlu mezi přímkami nezáleží.
Lze uvést vzorec s absolutní hodnotou

$$\alpha = \arccos\frac{|\vec{A}\cdot\vec{B}|}{AB}$$

a úhel vždy vyjde mezi 0 a π/2.