Řady a posloupnosti, dokončení, úplná indukce

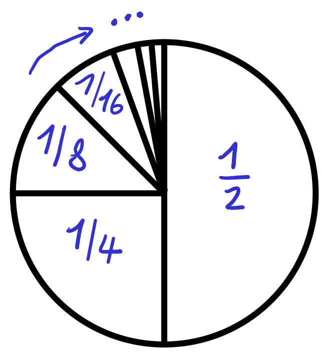
Příklad: Spočítejte řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

Prověříme, zda se nejedná o geometrickou řadu: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = 2^{\cancel{-k}-1}\,2^{\cancel{k}} = \frac{1}{2}$

Je to tedy geometrická řada, $a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2-1} = 1$$

Tento příklad lze dobře znázornit geometricky, každý člen řady je část plochy kruhu o celkové ploše rovné 1.



Příklady na řady:

4. a) Řešte rovnici $\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \dots$

Zkusíme rozdělit členys podezřením, že postup není korektní, neboť přeskupujeme nekonečně členů řady najednou)

$$\overset{?}{=} (x+x^3+\dots) + 3(x^2+x^4+\dots) = (x+x^3+\dots) + 3x(x+x^3+\dots) = (1+3x)\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}}_{\text{geom. řada}} =$$

$$= (1+3x)\frac{a_1}{1-q} = (1+3x)\frac{x}{1-x^2} \qquad x^2 < 1 \qquad a^{b+c} = a^b a^c$$

$$q = \frac{x^{2(\cancel{k}+1)-\cancel{1}}\,x^2}{x^{2k-\cancel{1}}} = x^2 \qquad x^0 = 1$$

$$\frac{5}{3} = (1+3x)\frac{x}{1-x^2} \quad \Big/ \cdot (1-x^2), \quad x \neq 1$$ (je ale splněno, s ohledem na předchozí podmínku)

$$5(1-x^2) = 3x(1+3x)$$

$$5 - 5x^2 = 3x + 9x^2 \quad \rightarrow \quad 14x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{28}\left(-3 \pm \sqrt{9+280}\right) = \frac{-3 \pm 17}{28} = \begin{cases} -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) řešte rovnici $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \dots = 1$

geom. řada, $a_1 = 2^x, \quad q = \frac{4^x}{2^x} = \frac{(2^2)^x}{2^x} = \frac{2^{2x}}{2^x} = \frac{2^{x+x}}{2^x} = \frac{\cancel{2^x}\,2^x}{\cancel{2^x}} = 2^x$

levá strana: $\frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x} = \frac{1}{2^{-x}-1}$

$$\frac{1}{2^{-x}-1} = 1 \quad / \cdot 2^{-x}-1 \;\rightarrow\; 2^{-x} \neq 1 \;\rightarrow\; \log_2 2^{-x} \neq \log_2 1 \;\rightarrow\; x \neq 0$$

$$-x \neq 0$$

$$1 = 2^{-x} - 1 \;\rightarrow\; 2 = 2^{-x} \;\rightarrow\; \log_2 L = \log_2 P \;\rightarrow\; 1 = -x \;\rightarrow\; \underline{\underline{x = -1}}$$

Matematická indukce

Zadáno: rekurentní vzorec $a_{n+k} = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k+1})$,
$a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou zadané

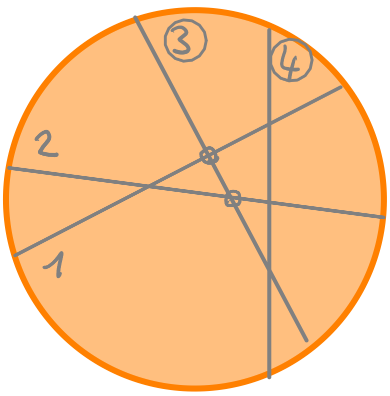
Máme přímý vzorec $a_n = F(n)$ s podezřením, že je to přímý vzorec pro tutéž posloupnost. Jistotu bychom měli, kdybychom ho uměli ověřit pro všech nekonečně členů posloupnosti.

Tento postup existuje, nazývá se důkaz matematickou indukcí.

Postup:

1. Ověříme přímý vzorec pro n+k-1 prvních členů.
2. Z přímého vzorce pro n+k-1 prvních členů odvodíme vzorec pro n+k tý člen. Pokud půjde přepsat do tvaru pro přímý vzorec pro n+k tý člen posloupnosti, přímý vzorec je správný.

Příklad: Ověřte z rekurentního vzorce pro počet dílků získaných n rovnými řezy pizzy přímý vzorec.



rekurentní vzorec:

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \qquad a_1 = 2$$

n	a_n
1	2
2	4
3	7

přímý vzorec:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Důkaz matematickou indukcí:

1. n=1: $a_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$ ✓

2. Z přímého vzorce pro n odvodíme (pokusíme se odvodit) vzorec pro n+1 člen:

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} + 1 =$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)+n+1}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

toto je přímý vzorec pro člen n+1.