Příklad věty, v níž se předpokládá omezená posloupnost:

$\{a_k\}$ omezená $\{b_k\}$ konverguje (má vlastní limitu)

pak posloupnost $\{a_k b_k\}$ také konverguje.

Příklad:

$a_k = (-1)^k$, $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

$b_k = \frac{1}{k}$, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \}$

$a_k b_k$ $\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

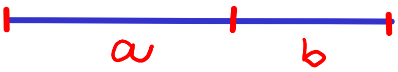
$$\lim_{k \to \infty} a_k b_k = 0$$

Příklad: Fibonacciho posloupnost

$a_1 = 1, \; a_2 = 1, \; a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ ... definice

k	a_k	a_{k+1}/a_k
1	1	
2	1	1
3	2	2
4	3	1.5
5	5	1.67
6	8	1.6
7	13	1.625

Najít přímý vzorec není snadné. Přímý vzorec obsahuje tzv. zlaté číslo.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \quad \text{zlaté číslo}$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \quad / \cdot \varphi$$

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

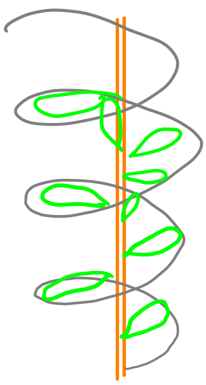
$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) = \begin{cases} 1.618\dots \\ -\frac{1}{1.618} \end{cases}$$

Přímý vzorec $a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1^k - (1-\varphi_1)^k\right)$

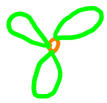
$= \mathrm{Round}\left(\frac{\varphi_1^k}{\sqrt{5}}\right)$ pro výpočet na počítači (druhý člen klesá)

Zajímavá vlastnost Fibonaccioho posloupnosti:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \varphi_1 \qquad f = \frac{m \text{ listů}}{n \text{ otoček}}$$ fylotaktický poměr

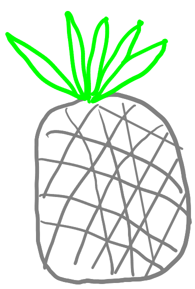


Lze ukázat, že nejefektivnější fylotaktický poměr je $\varphi = \varphi_1$



$f = 3$

ananas:



5, 8, 13 } spirál s různým stoupáním (fibonacciho čísla)

Řady

Intuitivní úvod (matematicky ovšem nesprávný):

Pokus sečíst všechny členy posloupnosti: $\underbrace{S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$

Tato suma není dobře definovaná, dokonce ji takto ani nelze napsat, nevíme, jak ji správně počítat a jaký má být výsledek.

zkoušíme $S \overset{?}{=} 1-1+1-1+1-1+\dots$

1. způsob: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$

$0 = 0 + 0 + 0$

2. způsob: $S = S_1 + S_2$

kde $S_1 = 1+1+1+\dots = \infty$

$S_2 = -1-1-1-\dots = -\infty$

$S = \infty - \infty$ nedefinovaný výraz

3. způsob: $S = 1\underbrace{-1+1-1+1-1+\dots}_{-S}\dots$

$= 1-(1-1+1-1+\dots) = 1-S$

$2S = 1 \qquad S = \frac{1}{2}$

Různými způsoby dostáváme různé výsledky a nevíme, který je správný.

Definice: Řadou nazýváme součet členů posloupnosti ve smyslu limity posloupnosti n-tých částečných součtů,

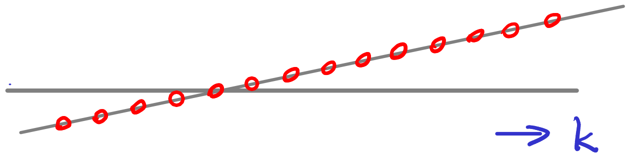
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Příklad: spočítejte řadu z posloupnosti $\left\{(-1)^{k+1}\right\}$

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 0 \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{neexistuje}$$

Řada vzniklá z aritmetické posloupnosti neexistuje (kromě speciálního případu nulové posloupnosti).



Geometrická řada:

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} |q|>1: & \lim \dfrac{\frac{1}{q} - q^n}{\frac{1}{q} - 1} \quad \text{neexistuje } q<-1, \text{ diverguje } q>1 \\ |q|<1: & \dfrac{1}{1-q} \lim\left(1 - q^{n+1}\right) = \dfrac{1}{1-q} \end{cases}$$

neomezeně roste

$q^{n+1} \to 0$

závěr:

Geometrická řada $a_1, q \quad q \neq 1$:

$$S = \begin{cases} \text{neexistuje} & |q| > 1 \\ = \underbrace{\dfrac{a_1}{1-q}} & |q| < 1 \end{cases}$$

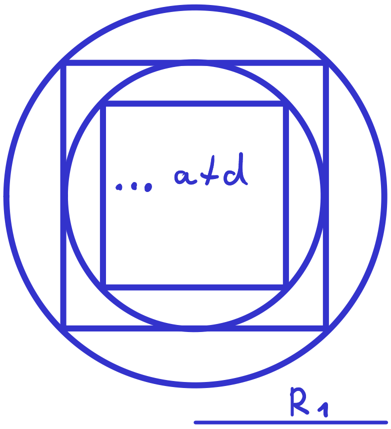
Vzorec pro součet členů geometrické posloupnosti (geometrická řady).

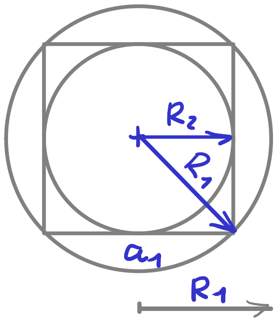
Příklad 8. z řešených příkladů:

vepsané čtverce a kružnice

Spočtěte:
a) stranu pátého čtverce,
b) součet obvodů všech čtverců.

Zadáno: R_1





úhlopříčka $2R_1 = \sqrt{2}\, a_1$

$R_2 = \frac{a_1}{2}$

$a_2 =$

$\sqrt{2}\, R_k = a_k$

$2R_{k+1} = a_k$

$\sqrt{2}\, R_{k+1} = a_{k+1}$

$\sqrt{2}\, \frac{a_k}{2} = a_{k+1}$

$$\rightarrow \boxed{a_{k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_k, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} R_1}$$

Jde o geom. řadu, $a_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} R_1$, $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$q < 1$

a) $a_5 = ?$

$a_k = a_1 q^{(k-1)}$

$$a_5 = a_1 \cancel{+} \cdot q^4 = \frac{2}{\sqrt{2}} R_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 =$$

$$= \sqrt{2} R_1 + \frac{4}{16} = \sqrt{2} R_1 + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} R_1$$

b) $o_k = 4 a_k$

$$o = 4S = 4 \frac{a_1}{1-q} = 4 \frac{\sqrt{2} R_1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 \frac{\sqrt{2} R_1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8 R_1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \underline{\underline{8 R_1 (\sqrt{2} + 1)}}$$