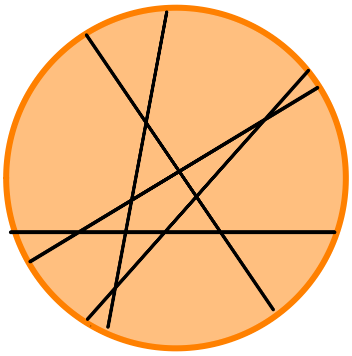
Aritmetická a geometrická posloupnost

Rozcvičovací příklad:

Přesvěčte se (zatím intuitivně, důkaz provedeme úplnou indukcí, až to budeme umět), že pokud vhodně rozkrojíme pizu n rovnými řezy, můžeme získat až n(n+1)/2 + 1 kousků.



n	N
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16

$$N(n) = a_n = N_n$$

$$N(n+1) = N(n) + n$$

$$4 = 2 + 2$$
$$7 = 4 + 3$$
$$11 = 7 + 4$$

$$a_{n+1} = a_n + n$$

rekurentní vzorec

n	$\frac{n(n+1)}{2} + 1$
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16

Zajímavost: $\frac{n(n+1)}{2}$

trojúhelníková čísla

Artimetická posloupnost

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$$

d .. diference

přímý vzorec

vlastnost: $a_{n+1} - a_n = d$

$a_1 \quad a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = \dots = a_1 + 3d$

zobecněním:

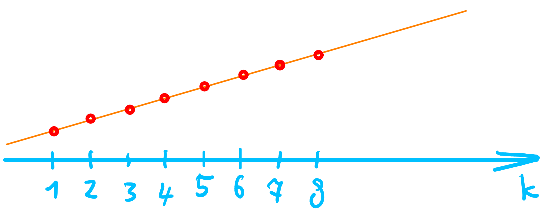
$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

přímý vzorec

Sečtěte $1 + 2 + \dots + 99 + 100$

$$\left.\begin{matrix} 2 + 99 = 101 \\ 1 + 100 = 101 \\ \vdots \\ 50 + 51 = 101 \end{matrix}\right\} \quad 50 \times 101$$

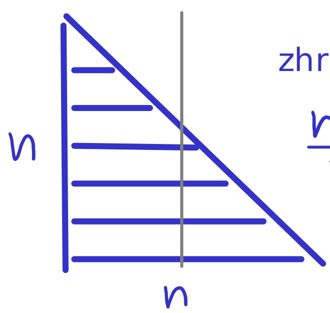
$$\frac{10100}{2} = \underline{\underline{5050}}$$



Gaussův vzorec

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)d] =$$



zhruba $\frac{nn}{2}$

$\underbrace{\frac{1+n}{2}}\, n$

průměr nejmenšího a největšího

Gauss: a_1+a_n $\quad a_2+a_{n-1}$ $\quad \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

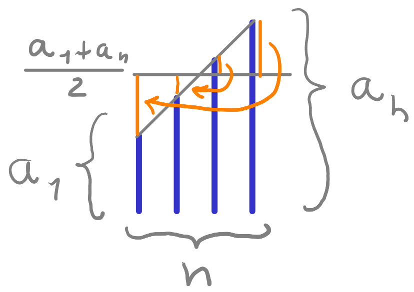
$$\boxed{\text{Definujeme } S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{n-tý částečný součet}}$$

$3+4+5 = 12$

$3\,\frac{3+5}{2} = 12$

Pro aritmetickou posloupnost platí $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$

$$\underbrace{S_{n+1}=S_n+a_{n+1}}_{\text{rekurentní vzorec}}$$



v budoucnu z něj dokážeme správnost vzorce pro S_n

Speciálně: $a_n=n$ (neboli $\{a_k, k\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$)

$S_n=\frac{1+n}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}$ trojúhelníková čísla.

Geometrická posloupnost

> Definice: Geometrická posloupnost je taková posloupnost, pro jejíž všechny členy platí $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

Rekurentní vzorec: $a_{n+1}=a_n q$

Přímý vzorec: a_1 zadáno

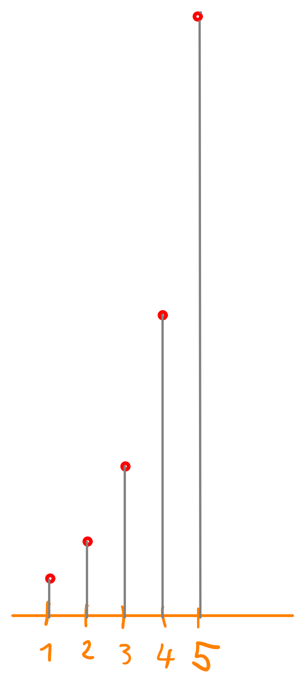
$a_2=a_1q$

$a_3=a_2q=a_1qq=a_1q^{2} \leftarrow n-1$ $\quad n$

$a_4=a_3q=a_1q^{3}\leftarrow n$ $\quad n+1$

zobecněním

$$\boxed{a_{n+1}=a_1q^{n-1}}$$ přímý vzorec



Odvození S_n:

$$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \underset{\text{geom. posl.}}{=} \sum_{k=1}^{n}a_1q^{n-1}=a_1\sum_{k=1}^{n}q^{n-1}=a_1(1+q+\dots+q^{n-2}+q^{n-1})=$$

$2\cdot2^0+22^1+22^3=$

$S_3=2(1+2+4)$ $\quad a_1=2$ $\quad q=2$

mezivýpočet

$$(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}+q^{n-1})(1-q) =$$

$$= 1 - \cancel{q} + \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} + \dots - q^n = 1 - q^n \quad / : (1-q)$$

V první závorce je ale naše hledaná suma $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$

vzorec $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti

Příklad 5.13.1: Zjistěte, zda posloupnost {1/(n(n+1)} je rostoucí či klesající.

$\frac{1}{n(n+1)}$ $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30}$

Definice klesající posloupnosti $\quad k > l \Rightarrow a_k < a_l$

$$a_k < a_l \iff \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{l(l+1)} \qquad k = l + n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{(l+n)(l+n+1)} < \frac{1}{l(l+1)} \quad / \cdot \text{jmenovatelé}$$

$$l(l+1) < \underbrace{(l+n)(l+n+1)}_{l(l+n+1)+n(l+n+1)}$$

$$\cancel{l(l+1)} < \cancel{l(l+1)} + ln + \dots$$

$$1 < 2ln + n^2 + 1 \qquad \text{splněno}$$

Příklad 5.13: $\{a_n\}$: $a_2+a_3=9$, aritmetická
$a_2 a_3 = 14$
Určete a_{10}.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\left.\begin{aligned} a_2+a_3&=9 \\ a_2 a_3 &= 14 \end{aligned}\right\}$$ 2 rovnice pro 2 neznámé

$a_2 = 9 - a_3$ dosadíme do druhé:

$(9-a_3)a_3 = 14$

$-a_3^2 + 9a_3 - 14 = 0$

$D = 81 - 56 = 25$

$a_3 = \frac{-1}{2}(-9 \pm 5) = \genfrac{}{}{0pt}{}{+7}{+2}$

2 řešení: $\underline{a_2 = 2 \quad a_3 = 7}$.

$d = a_3 - a_2 = 5 \qquad a_1 = a_2 - d = 2 - 5 = -3$

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = a_1 - 5 \cdot 9 = -3 + 45 = \underline{\underline{42}}$

$\underline{a_2 = 7,\ a_3 = 2}$

$d = -5 \qquad a_1 = a_2 - d = 12$

$a_{10} = a_1 + 9d = 12 - 5 \cdot 9 = 12 - 45 = \underline{\underline{-33}}$

K dotazu k označední různých druhů součtů (suma, alternativní suma, integrál):

$$\sum_{k=1}^{n} \qquad S_{k=1}^{n} \qquad \int_a^b$$