Rovnice neřešitelná metodami, které jsme si uváděli:

$$e^x - 5x = 1$$

Jedno řešení $x_1 = 0$

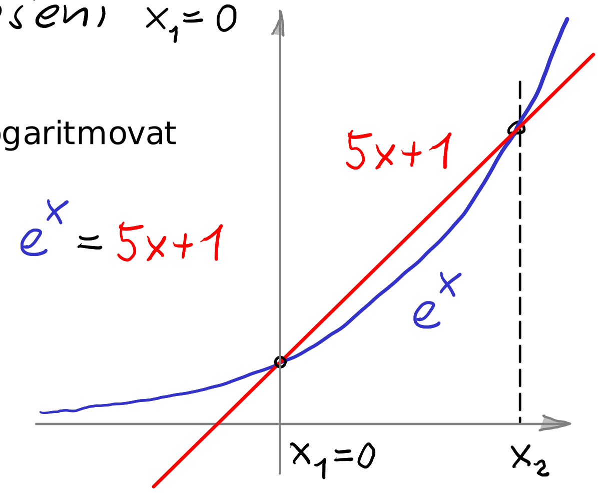
$$e^x = 5x + 1 \,/\, \ln$$

zkoušíme logaritmovat

$$\ln e^x = \ln 5x$$

$$x = \ln(5x+1)$$

dostaneme ale logaritmickou rovnici



Rovnice tohoto typu se nazývají

transcendentní rovnice.

Jedna z možných metod, jak je řešit, je prostá iterační metoda.

rekurentní vzorec

$$\boxed{x_{k+1} = \ln(5x_k + 1)}$$

k	x_k
0	2 volíme
1	$\underbrace{\ln(5 \cdot 2 + 1)}$
2	$\ln(5 \cdot \square + 1)$
3	atd.

Řešíme opakovaným dosazováním do vzorce, pokud se nám hodnoty již nemění, je hledaná rovnice splněna a tudíž se jedná o řešení.

Stejnou metodu lze použít například na algebraické rovnice vyšších stupňů (>2).

Příklad: $3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$

lze $x_{k+1} = -3x_k^3 + 2x_k^2 - x_k - 1$ člen se 3. mocninou může pokazit konvergenci

Lepší způsob: $3x^3 = 2x^2 - x - 1 \rightarrow \boxed{x_{k+1} = \sqrt[3]{\dfrac{2x_k^2 - x_k - 1}{3}}}$ rekurentní vzorec

Najdeme-li kořen, snížíme stupeň o 1 vydělením kořenovým činitelem.

$$P_3(x) : \underbrace{(1 - x_{kořen})}_{\text{kořenový činitel}} = Q_2(x)$$

Toto je již polynom stupně 2 a rovnici můžeme řešit známými způsoby (vzorec, přímý rozklad, doplnění na úplný ■).

V algebře na FEL se učí jeden hezký algoritmus na dělení kořenovým činitelem. Kdo by nechtěl čekat, vygooglujte si a vyzkoušejte Hörnerovo schema.

Pro algebraické rovnice až do stupně 4. existují vzorce (ale dost složité).
Je dokázáno, že pro algebraické rovnice stupně 5. a vyšších vzorec neexistuje.

Posloupnosti

- posloupnosti (vlastnosti, limity, ...)
- aritmetické a geometrické posloupnosti
- řady
- důkaz matematickou indukcí

Posloupnosti

$a_k \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Příklady: $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $\quad a_k = k$

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$ $\quad a_k = \frac{1}{k+1}$

Lze zadat:
- výčtem
- vzorcem
- rekurentně

Rekurentně:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 4 \end{cases}$$

$$\{2, 5, \frac{13}{2}, \frac{13}{4} + 4, \dots\}$$

Jiný příklad:
- $a_k = 2^k - 1$ $\quad \{1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots\}$
- $a_{k+1} = 2a_k + 1, \; a_1 = 1$ $\quad \{1, 3, 7, 15, \dots\}$

Je podezření, že obě posloupnosti jsou stejné.
S jistotou to budeme vědět až po důkazu matematickou indukcí.

Vlastnosti posloupností:

Rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající.

a_k můžeme chápat jako $f(k)$ na $D_f = \mathbb{N}$,

a_k jsme označili jako $a(k)$ a chápeme jako funkci indexu k s def. oborem ℕ.

Uvedené vlastnosti výše pak definujeme formálně stejně jako u funkcí.
Například rostoucí funci definujeme:

$$k > l \Rightarrow a_k > a_l \qquad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

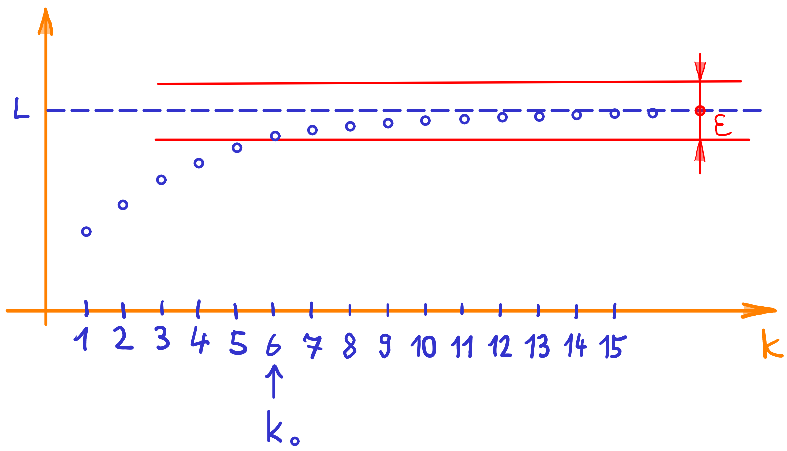
Pro srovnání, u funkce jsme měli $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \;\; \forall x \in D_f$

Omezená posloupnost

$\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ je omezená $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists K \in \mathbb{R}: |a_k| < K \ \forall k \in \mathbb{N}.$

Limita posloupnosti

a_k má limitu $L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \, \exists k_0: |a_k - L| < \varepsilon \ \forall k > k_0.$



Značíme

$$L = \lim_{k \to \infty} a_k$$

Příklad 1
Najděte limitu posloupnosti

$$a_k = \frac{2k^3 - k}{k^3 + 1}; \quad \left\{ \frac{1}{2}, \frac{14}{9}, \frac{51}{28}, \frac{508}{257}, \dots \right\}$$

Úprava:

$$\frac{2k^3 - k}{k^3 + 1} = \frac{2 - \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^3}}$$

čit. a jm. dělíme k^3

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{k^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{\to 0}} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Platí věta:

$$\lim_{k \to \infty} (a_k \pm b_k) = \lim_{k \to \infty} a_k \pm \lim_{k \to \infty} b_k$$

a podobně podobná věta i pro limitu součinu a podílu, za společného předpokladu, že všechny limity existují, jsou vlastní a limita ve jmenovateli podílu není rovna nule.

Možnosti, které mohou u limit nastat:

$$\lim_{k\to\infty} a_k \begin{cases} = L & \text{konverguje, má vlastní limitu} \\ = \infty & \text{diverguje, má nevlastní limitu} \\ \text{neexistuje} & \end{cases}$$

Příklady:

$\lim_{k\to\infty} k \longrightarrow \infty$ $\qquad \{1, 2, 3, \dots\}$

$\lim_{k\to\infty} (-1)^k$ neexistuje $\qquad \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

alternující posloupnost
(střídá znaménko)

Alternující posloupnost mění znaménko. Limitu však mít může, například

$$\frac{(-1)^k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad ; \quad \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$