Exponenciální rovnice - dokončení

Příklad 10

Vypočítejte y z rovnice $x = \underbrace{\frac{e^y - e^{-y}}{2}}$.

(mimochodem je toto sinh(y), hyperbolický sinus)

Idea: $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$

$$x = \frac{1}{2}\left(e^y - \frac{1}{e^y}\right)$$

substituce $s = e^y$, $y = \ln s$

$$2x = s - \frac{1}{s} \qquad / \cdot s \qquad s = 0 \text{ (splněno ale vždy, neboť } s = e^y\text{)}$$

$$2sx = s^2 - 1$$

$$s^2 - 2sx - 1 = 0 \qquad \text{kvadratická rovnice}$$

$$D = 4x^2 + 4 = 4(x^2+1)$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}x \pm \cancel{2}\sqrt{x^2+1}\right) = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

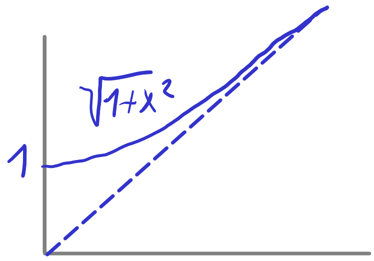
$$s = e^y \qquad y = \ln s$$

$$y_{1,2} = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)$$

musí být $x \pm \sqrt{x^2+1} \geq 0$

To lze splnit jen s $+$

$$\underline{\underline{y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}}$$



Logaritmické rovnice

Příklad 12

$$\log(x+13) - \log(x-3) = 1 - \log 2$$

$$\log(x+13) - \log(x-3) + \log 2 = 1$$

$$\log\left(2\,\frac{x+13}{x-3}\right) = 1 \qquad /\ 10^{\cdots}$$

$$10^{\log(\ldots)} = 10^1$$

vzájemně inverzní funkce

$$2\,\frac{x+13}{x-3} = 10 \qquad /\cdot(x-3)$$

$$2x + 26 = 10x - 30$$

$$-8x = -56$$

$$\underline{\underline{x = 7}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+13 > 0 \\ x-3 > 0 \end{array}\right\} x > 3$$

vzorec $\log a + \log b =$

$= \log ab$

$\log x^p = p \log x$

$\log x^{-1} = -\log x$

Příklad 14

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$$

podmínky:

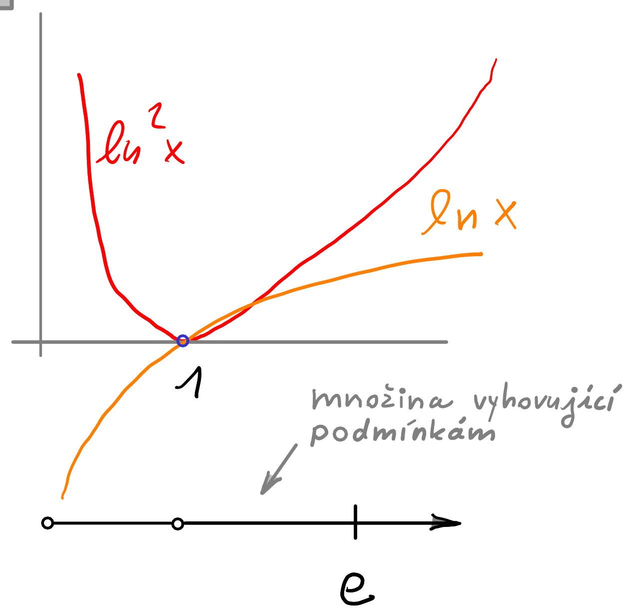
$x > 0 \qquad \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \qquad /\cdot \ln^2 x$$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1 \qquad /\ e^L = e^P$$

$$x = e^1 \qquad \underline{\underline{e}}$$



Řešení splňuje podmínky.

Příklad 15

$$\frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x} = 0$$

podmínky: $x > 0$

$x \ln^3 x \neq 0 \iff x \neq 0 \vee \underbrace{\ln x \neq 0}_{x \neq 1}$

$$\frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x} = 0 \qquad \Big/ \cdot x \ln^3 x$$

$$-\ln x = -2$$

$$+\ln x = +2 \qquad \Big/ \exp()$$

$$\underline{\underline{x = e^2}}$$

Goniometrické rovnice

Jsou rovnice typu $\boxed{F(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x) = 0.}$

<u>Metoda řešení</u>

argumenty převedeme na stejný typ.
$\cos x$, $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$ převedeme na jeden typ funkce.

Připomínáme, že každou goniometrickou funkci lze vyjádřit pomocí kterékoliv jiné.

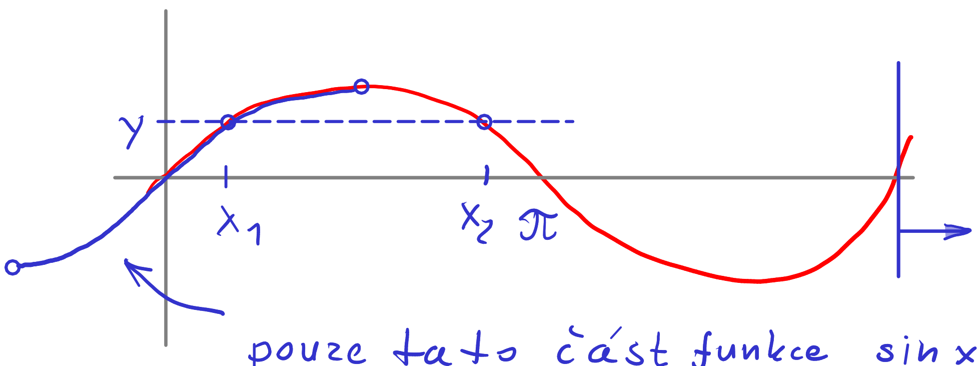
Tím rovnici převedeme na některý z již známých typů bez goniometrických funkcí (lin., kvadratické, ...).

Např. $\sin x$,

potom substituce $y = \sin x$

řešíme, → y je řešení

pak $x_1 = \arcsin y$ řešení
$x_2 = \pi - \arcsin y$ z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

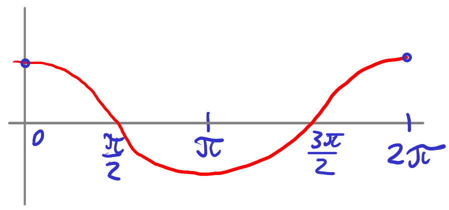


pouze tato část funkce $\sin x$ je prostá a existuje k ní inverzní, tou je arcsin.
Nesmíme pominout další kořeny, zde x_2.

$$x \in \{x_1 + 2k\pi,\ x_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Příklad 16 $\quad 1-\cos x = 0$

$\cos x = 1$



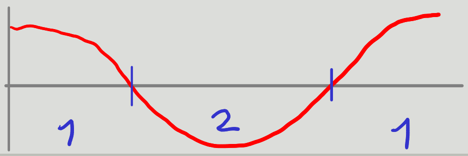
$$x \in \{0 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} = \{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Příklad 18 $\quad \sin 2x = \cos x$

mohli bychom vyjádřit z $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ 1

$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$ 2



Toto je slepá cesta, neboť nejdřív je nutno sjednotit argumenty.

Nutno převést na stejný argument

platí vzorec

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$ ← tento vzorec si ukážeme, až budeme mít komplexní čísla

speciální případ $a=b$:

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$, dosadíme do řešené rovnice

$$2\sin x\cos x = \cos x$$

$\cos x = 0$

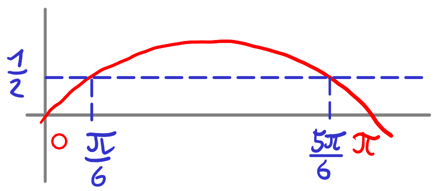
$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\cos x \neq 0$

můžeme krátit

$2\sin x\cancel{\cos x} = \cancel{\cos x}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$



Řešení rovnice dostaneme sjednocením řešení obou větví:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Pozn. $\frac{\pi}{2} + k\pi$ lze zapsat jako $\underbrace{\frac{\pi}{2}(1+2k)}$

liché číslo $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

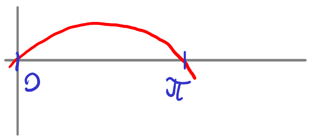
$\frac{\pi}{2}(1+2k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ... liché násobky $\frac{\pi}{2}$.

Příklad 19 $\quad \sin 2x = \operatorname{tg} x \quad x \in \langle 0, 2\pi)$

Vzorec $\quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2}, \quad x \neq \frac{3\pi}{2}$$

$\sin x = 0$



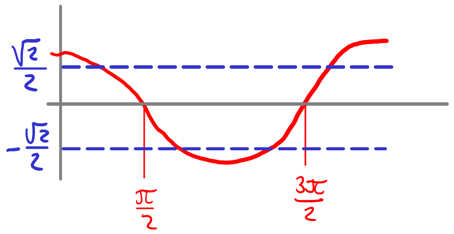
$x \in \{0, \pi\}$

$\sin x \neq 0$

$$2 \cancel{\sin x} \cos x = \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}$$

$$2\cos^2 x = 1 \quad / \pm\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$