Budu používat nový software Xournal++,
ve vektorové grafice, rychlejší, čitelnější, umožňuje poznámky editovat.

Dnes:

- Iracionální rovnice
- Exponenciální a logaritmické rovnice
  - transcendentní rovnice
- Goniometrické rovnice

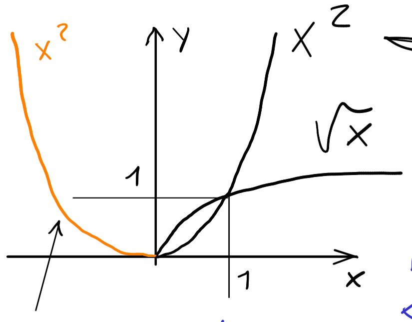
Iracionální rovnice

Jsou rovnice s odmocninou

příklad: $\sqrt{x+1}+2x=0$

Řešení: Idea: $\sqrt{\ }$ převedeme na 1 stranu a umocníme

$$\sqrt{x+1} = -2x \quad /^2 \qquad x+1\geq 0$$
$$x+1 = (-2x)^2 \qquad -2x \geq 0$$
$$x+1 = 4x^2 \qquad \frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{D})$$
$$4x^2 - x - 1 = 0$$



Pouze na $\langle 0,\infty)$

Tuto část musíme vyjmout z D_f

$$D = b^2-4ac = 1-4\cdot 4(-1) = 17$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{8}\left(1\pm\sqrt{17}\right) \doteq \begin{cases} \frac{5}{8} \\ -\frac{3}{8}\end{cases}$$

~~Oba~~ kořeny vyhovují podmínce výše. Jen záporný kořen.

Zkouška:

$$\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}+1} + 2\,\frac{1\pm\sqrt{17}}{8} \overset{?}{=} 0$$

$$\sqrt{\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}} + \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \overset{?}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}} \overset{?}{=} -\frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \quad /^2$$

$$\frac{9\pm\sqrt{17}}{8} \overset{?}{=} \frac{1\pm 2\sqrt{17}+17}{4^2} \quad /\cdot 8$$

$$9 \pm \cancel{\sqrt{17}} = \frac{1}{2} \pm \cancel{\sqrt{17}} + \frac{17}{2} \quad \rightarrow \quad 9 = 9 \ \checkmark$$

$$9\,\cancel{8} \pm \sqrt{17} \overset{?}{=} (2 \pm 4\sqrt{17} + 34)\cdot\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \cancel{\pm\sqrt{17} \mp 4\sqrt{17} = 2+34-8}$$

$$\cancel{\sqrt{17}\,\underbrace{(\pm 1 \mp 4)}_{\mp 3} = 28 \quad /: \quad \rightarrow \quad \sqrt{17} = \frac{28}{\mp 3} \quad /^2}$$

Někde bude chyba, zkouška nevyšla

Oprava: Při mocnění musí být i pravá strana ≥ 0, neboť aplikujeme stejnou inverzní funkci $f^{-1}(x)=x^2,\ x\geq 0$ na obě strany rovnice.

Druhý příklad: Řešte $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1.$

Řešení:

$$\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{2-x} \quad /^2 \qquad \text{podmínka} \quad x-1 \geq 0$$

$$x-1 = (1-\sqrt{2-x})^2$$

$$x-1 = 1 - 2\sqrt{2-x} + (2-x) \qquad \text{Další podmínka } 2-x \geq 0$$

Opět máme iracionální rovnici, s méně odmocninami, viz předchozí příklad.

$$2\sqrt{2-x} = 3 - x - x + 1$$

$$2\sqrt{2-x} = 4 - 2x \quad /^2 \qquad \text{podmínka (už máme)}$$

$$\cancel{4}(2-x) = \cancel{2}^{2}(4-4x+x^2) \qquad (2-x)^2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \text{řešení } \{1, 2\}$$

$\pm 1 \quad \pm 2$

podmínky

$x - 1 \geq 0$

$2 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2$

$x \geq 1 \wedge x \leq 2$

$x \in \langle 1, 2 \rangle$

podmínky splněny

Exponenciální rovnice

$$F(x, a^x) = 0$$

obecně řešíme logaritmováním.

$$L = P \quad / \log_a \leftarrow$$ operace nemění řešení, protože $\log_a$ je prostá.

$$\log_a L = \log_a P$$

Příklad: 7. viz učební text

$$0.25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}} \quad / \cdot 2^{x+3}, \qquad 0.25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

$$\frac{1}{(2^2)^{(2-x)}} 2^{x+3} = 256$$

v podstatě jsme použili postup $a = b^{\log_b a}$

$\leftarrow$ vzorec $(a^b)^c = a^{bc}$

$\leftarrow$ vzorec $\frac{1}{a^b} = a^{-b}$

$$2^{-2(2-x)} \, 2^{x+3} = 2^8 \rightarrow 2^{2x+x-4+3} = 2^8 \quad / \log_2$$

$$2x + x - 4 + 3 = 8 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

zk.: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \stackrel{?}{=} \frac{256}{2^{3+3}} \rightarrow 4 \neq 4$ ✓

Příklad: 8. z textu

$$3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$$

Obecně: upravujeme na

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad / \log_a$$

$$f(x) = g(x)$$

Řešení:

$$3^{2x}3^{-1}+3^{2x}3^{-2}-3^{2x}3^{-4}=3\cdot 105$$

$$3^{2x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{81}\right) = 3\cdot 21\cdot 5$$

$$3^{2x}\,\frac{27+9-1}{81} = 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

$$3^{2x}\,\frac{\cancel{35}}{81} = 3\cdot 3\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{7}$$

$$\frac{3^{2x}}{3^4} = 9$$

$$3^{2x-4} = 3^2 \quad / \log_3$$

$$2x-4 = 2 \rightarrow 2x=6, \quad \underline{\underline{x=3}}$$