- Lineární rovnice → soustavy
- kvadratická rovnice
- exponenciální a logaritmické rovnice příště

$ax = b \quad /:a$

$\cancel{x = \frac{b}{a}}$

správně:

$a = 0$

$0x = b$

$b = 0$:

$0 = 0$

$\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

$b \neq 0$

$0 = b$

nemá řešení

$\underline{\underline{\{\ \} = \emptyset}}$

$a \neq 0$

$ax = b \quad /:a$

$\cancel{\frac{1}{a}}ax = \frac{1}{a}b$

$\underline{\underline{x = \frac{b}{a}}}$

∞ žádné jediné

řešení

zobecnění

$x = f^{-1}(b)$

viz níže

analogie předchozího případu $f(x) = b$

(speciální případ, kdy $f(x) = ax$)

Totéž pro rovnice s parametrem

řešte rovnici s parametrem:

$(1+p)x = 4$

$(1+p) = 0$

$p = -1$

$0x = 4$

$0 = 4$

$\{\ \}$

$(1+p) \neq 0$

$(1+p)x = 4 \quad /:(1+p)$

$\underline{x = \frac{4}{1+p}}$

$\{ \}$

soustavy lineárních rovnic

příklad: $\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 5x - 3y &= -1 \end{aligned}$

Řešení

3 metody:
- sčítací
- dosazovací
- srovnávací

sčítací

princip:
pokud řešení ∃, má soustava číselně tvar

$$7 = 7$$
$$-1 = -1$$
$$L_1 + L_2 = P_1 + P_2$$
$$6 = 6$$

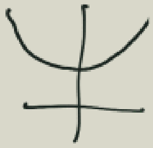
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \quad &/ \cdot 3 \\ 5x - 3y &= -1 \quad &/ \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 6y &= 21 \\ 10x - 6y &= -2 \end{aligned}$$

$$\oplus \quad 19x = 19$$
$$x = 1$$

Dosadíme do kterékoliv ze zadaných rovnic:

$$3 \cdot 1 + 2y = 7 \quad / -3$$
$$2y = 7 - 3$$
$$y = \frac{4}{2}$$
$$y = 2$$
$$(x, y) = (1, 2)$$



$$(1+x^2) - 2y = 0$$
$$\frac{y}{1+x^2} = 2$$

$$1 + x^2 = 2y$$
$$1 + x^2 = \frac{y}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= P_1 \\ L &= P_2 \end{aligned}\right\}$$

$$2y = \frac{y}{2}$$

$y = 0$: $0 = 0$, $\underline{y = 0}$

$y \neq 0$: $2 = \frac{1}{2}$, $\underline{\{ \}}$

$$1 + x^2 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\{ \} \qquad \{ \}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\{ \}}$$

zk. že z 2 rovnice dostaneme totéž:

$5 \cdot 1 - 3y = -1 \quad /-5$

$-3y = -1-5$

$y = \frac{-6}{-3} = 2$ vyšlo stejně

Jiná úloha: $\begin{array}{rl} x-2y=3 & R_1 \\ -2x+4y=-6 & R_2 \end{array}$

řešení:

$x - 2y = 3 \quad /2$

$-2x + 4y = -6$

$2x - 4y = 6$

$-2x + 4y = -6$

$\oplus \quad 0x + 0y = 0$

$0 = 0$

$\cancel{x \in R \quad y \in R}$

správně:

rovnice jsou závislé, jedna je násobkem druhé, jednu vynecháme.

$x - 2y = 3$

$\cancel{-2x + 4y = -6}$ ... rovnice jsou závislé.

$x - 2y = 3$ jedna rovnice pro dvě neznámé.

Jednu neznámou volíme, druhou dopočítáme:

$y = t \in R$ t... volitelný parametr

x: $x - 2t = 3$

$x = 3 + 2t$

$\underline{x = 3+2t, \ y = t, \ t \in R}$

Také můžeme zapsat $(x,y) = (3+2t, t)$
$t \in \mathbb{R}$

Řešte
$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \quad /\cdot 2 \\ -2x + 4y &= -5 \end{aligned}$$

$\oplus$ $0 + 0 = 1$ nelze nikdy splnit

sporná soustava, $(x,y) \in \{\ \}$

(řešení neexistuje).

Šlo by řešit úplně obecně

R_1 $ax + by = r$
R_2 $cx + dy = s$?

$$\begin{aligned} ax + by &= r \quad /\cdot(-d) \\ cx + dy &= s \quad /\cdot(+b) \end{aligned}$$

$$(-ad + bc)x + \underbrace{(-bd + bd)}_{0}y = sb - rd$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{sb - rd}{bc - ad} = \frac{rd - sb}{ad - bc} \\ \text{podobně} \quad y &= \frac{ra - rc}{ad - bc} \end{aligned}\right\} \text{vzorce}$$

Toto je řešení za podmínky $\underbrace{ad - bc}_{\text{determinant}} \neq 0$

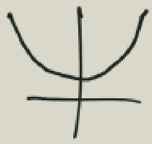
$$ad - bc \begin{cases} \neq 0 & 1 \text{ řešení} \\ = 0 & \begin{cases} \infty \text{ řešení} \\ 0 \text{ řešení} \end{cases} \end{cases}$$

Kvadratické rovnice

$x^2 + 3x + 2 = 0$ algebraická rovnice

$$P_2(x) = 0$$ (zde 2. stupně).

$$x^2+1=0$$



nemá řešení

Metody řešení:

- úprava na úplný $\square$

$$ax^2+bx+c \to \underbrace{a(x-x_1)^2+d}_{f(x)}$$

- vzorec $$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{\underbrace{b^2-4ac}_{D}}\right)$$

D = diskriminant: < 0 nemá ř., $= 0$ 1 ř., > 0 2 ř.

- přímý rozklad
- další (důvtipné) metody (za využití další teorie
- (přibližné)

• Přímý rozklad:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) =$$

kořeny

lze takto rozložit vždy, dokáže se zpětným pronásobením.

$$= a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) =$$

$$= a[x^2 + x\underbrace{(-x_1-x_2)}_{p} + \underbrace{x_1x_2}_{q})$$

$$p = \frac{b}{a} \qquad q = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \underbrace{px}_{-x_1-x_2} + \underbrace{q}_{x_1x_2}$$

$$x^2+3x+2 \qquad 2 = 1\cdot 2 \quad \times$$

$$(-1)\cdot(-2) \quad \checkmark$$

$$(x+1)(x+2)$$

$$x_1=-1, \quad x_2=-2$$

---

x^2-x-12 řešte přímým rozkladem

$q=12$ možnosti: $12 = 1\cdot 12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4$

kvůli znaménku $+12$ se rozdělují počet na:

$$(x+3)(x-4)=$$

$$=x^2-x-12 \quad \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{lll} +1 & -12 & \times \\ -1 & +12 & \times \\ +2 & -6 & \times \\ -2 & +6 & \times \\ +3 & -4 & \times \\ -3 & +4 & \checkmark \end{array}\right\}$$

otestujeme na $-x_1-x_2=p=$
$=-1$

$$x_1=-3$$
$$\underline{\underline{x_2=4}}$$

Řešení $ax^2+bx+c=0$ obecně:

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$(r+s)^2=r^2+2rs+s^2$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

Nyní operace provedeme inverzně

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \quad /\pm\sqrt{} \quad , \quad -\frac{b}{2a}$$

$$x_{12} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

člen pod odmocninou:

$$= \frac{b^2 - c \cdot 4a}{4a^2}$$

$$x_{12} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{D}\right)$$

kde $D = b^2 - 4ac$ je diskriminant.