$\boxed{\text{Řešení rovnic}}$

$L = P$
$L(x) = P(x)$
$\underbrace{L(x) - P(x)}_{} = 0$
$F(x) = 0$

různé zápisy rovnic, x … neznámá

odbočka
$y = f(x)$
y, x proměnné
$y(x)$, x nezávisle proměnná

zde $x \in \mathbb{R}$
Hledáme takové x, pro které $L(x) = P(x)$, takové x je řešení.
řešení je obecně množina $\check{R} = \{x \in \mathbb{R}, \text{podmínka}\}$
nebo $\{x_1, x_2, x_3\}$
nebo $\langle 0, \infty)$, $\{\ \} = \emptyset$

Různá rovnítka:
- úpravy: př. $(x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$

rovnosti platí vždy (pokud počítáme správně)

- rovnice

$L = P$

zde nevíme, jestli rovnost platí

$\overset{?}{=}$ význam rovnítka v rovnici

$\emptyset$ $\{\ \}$ nemá řešení

Úpravy rovnic:

$\boxed{\text{Úprava nesmí změnit řešení}}$

- Úpravy:
  - Odečítání (přičítání) $x + 5 = 4 \quad / -5$
  - Násobení (dělení) $a \neq 0$

$ax = ab$

$a = 0$: $0 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$: $\cancel{a}x = \cancel{a}b$, $x = b$

$\check{R} = \{-1\}$

$\check{R} = \mathbb{R}$

změnili jsme řešení

$x \in \check{R}$:
$4 = 4$
$4 - 5 = 4 - 5$
$-1 = -1$

$4 = 4 \quad /\cdot 2$
$8 = 8$
$/\cdot 0$
$0 = 0$

$x = 1 \quad /\cdot 0$
$0 \cdot x = 0 \cdot 1$
$0 = 0$

- $f(x) = a$

řešíme inverzní funkcí

$f(x) = a \quad / f^{-1}$

znamená $f^{-1}(L) = f^{-1}(P)$

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x} = f^{-1}(a)$$
$$x = f^{-1}(a)$$
vyčíslením získáme řešení

Úskalí • Nemusí $\exists$ inv. funkce

Věta: Aplikací <u>prosté</u> funkce na levou a pravou část rovnice neměníme řešení.

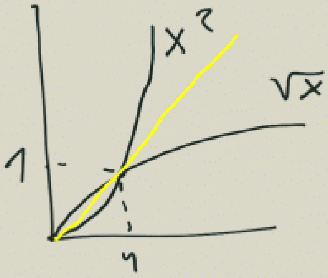
Příklady:

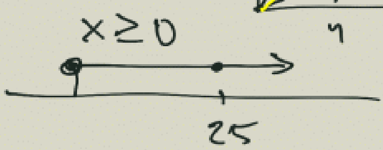
• $\sqrt{x} = 5$ $\qquad \underbrace{x \geq 0}_{2}$

$\sqrt{x}^2 = 5^2 \quad / \ ^2$

$\underbrace{x = 25}$

$$\underline{\underline{x = 25}}$$



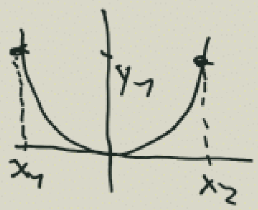


• $x^2 = 16 \quad / \sqrt{\ }$ ← Pozor, $\sqrt{\ }$ není inverzní funkce k ^{2} protože x^2 <u>není prostá na $\mathbb{R}$</u> !

~~$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$~~

~~$x = 4$~~

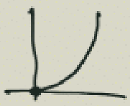
evidentně -4 je také řešení



prostá: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

správně:

$x \geq 0$:



x^2 je prostá

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$x = 4$

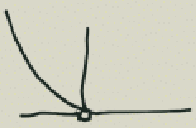
podmínka splněna

$\underline{\underline{x = 4}}$

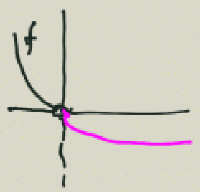
↑

$\check{R}_1$

$x < 0$:



x^2 je prostá



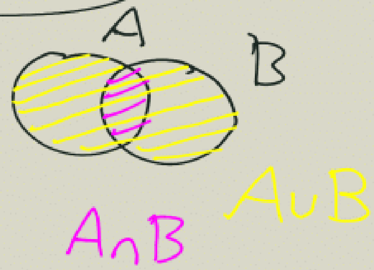
$-\sqrt{x^2} = -\sqrt{16}$

$x = -4$

podmínka splněna,

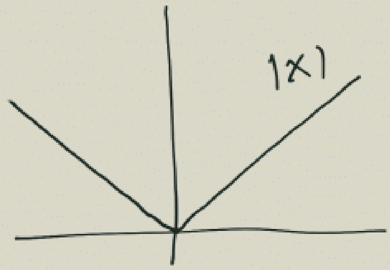
$\check{R}_2 \rightarrow \underline{\underline{x = -4}}$

$$\check{R} = \check{R}_1 \cup \check{R}_2$$



Rovnice s absolutní hodnotou

$$|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



1.20 př. 1

- Řešte rovnici $|\underbrace{2x+1}_{\substack{\ge 0 \\ < 0}}| + |\underbrace{2x-1}_{\substack{\ge 0 \\ < 0}}| = 3$

zk.:

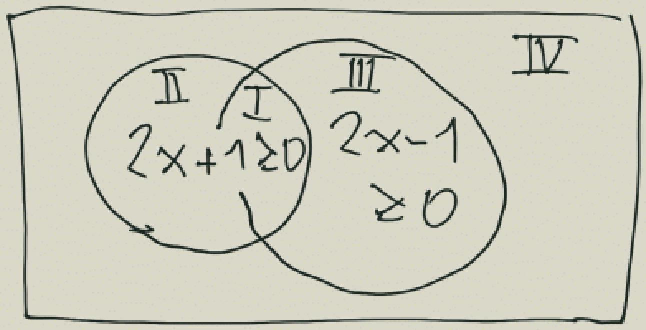
$|2\cdot\frac{3}{4}+1| + |2\cdot\frac{3}{4}-1| \overset{?}{=} 3$

$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \overset{?}{=} 3$

$\frac{6}{2} \overset{?}{=} 3$

$3 \overset{\checkmark}{=} 3$

splňuje

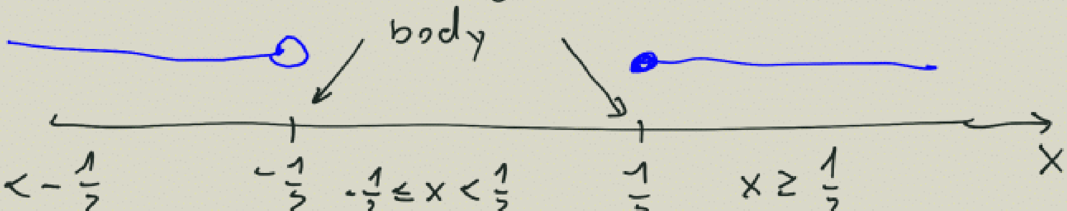


ale jedna kombinace je prázdná, redukuje se jen na 3 možné případy

- nulové body:
  - $\to 2x+1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2}$
  - $\to 2x-1 = 0, \quad x = +\frac{1}{2}$

III.: $\{\ \}$

nulové body



$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$	$x \ge \frac{1}{2}$
$-(2x+1) - (2x-1) = 3$	$(2x+1) - (2x-1) = 3$	$(2x+1) + (2x-1) = 3$
$-4x = 3 \quad /:-4$	$1+1 = 3$	$4x = 3$
$x = -\frac{3}{4}$	$2 = 3$	$x = \frac{3}{4}$
podm. splněna	$\{\ \}$	podm. splněna

$\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

$$\left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

1.20. př. 5

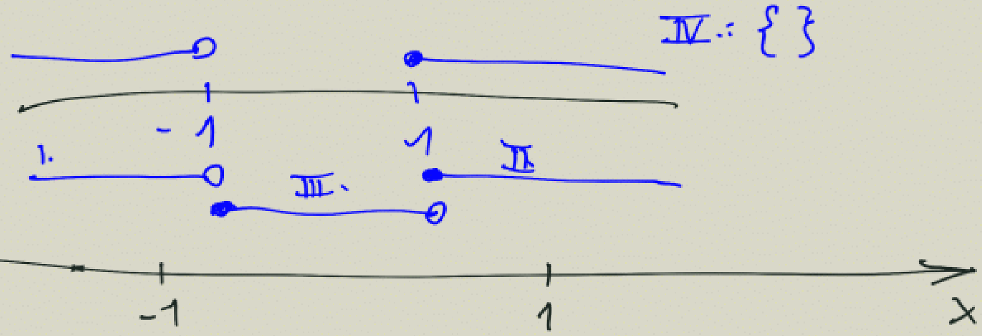
- Řešte v R: $\frac{1}{|x-1|} = |x+1|$

$$\frac{1}{|x-1|} = |x+1| \quad / \cdot |x-1| \qquad x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

díky této podmínce můžeme násobit

$$1 = |x+1||x-1|$$



$$1 = [-(x+1)][-(x-1)] \qquad 1 = -(x+1)(x-1) \qquad 1 = (x+1)(x-1)$$

$1 = (x+1)(x-1)$

$1 = x^2 - 1$

$2 = x^2$

$\pm\sqrt{2} = x$

podmínce vyhovuje $-\sqrt{2}$

$\cancel{1} = -x^2 + \cancel{1}$

$0 = -x^2$

$x = 0$

to již máme vyřešeno

$x \in \{\pm\sqrt{2}\}$

podmínce vyhovuje $x = \sqrt{2}$

$$x \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$$

podmínka $x \neq 1$ je splněna

příště: nerovnice

kvadrat. rovnice

iracionální rovnice
exp. a log. rovnice
goniometrické rovnice
transcendentní rovnice

algebraická rovnice