Přípravný kurz matematiky 2020

úvodní informace

https://mfkurz.fel.cvut.cz/ … www stránky kurzu
http://aldebaran.cz/~zacek/ ... tato prezentace

Rozsah: 14×2×1.5 hodiny = 42 hodin
Vyučující:
Martin Žáček
E-mail na vašeho vyučujícího: zacekm@fel.cvut.cz

Náplň:
- matematické operace, úpravy výrazů
- elementární funkce a jejich vlastnosti
- rovnice a nerovnice
- komplexní čísla
- posloupnosti – limita posloupnosti
- analytická geometrie
- diferenciální a integrální počet

Literatura:
- *skripta M. Hyánková, V. Sedláčková: Matematicko-fyzikální seminář. Matematika* (http://math.feld.cvut.cz/0educ/priprava/) ve skriptech však není integrální a diferenciální počet, je v nich zase kombinatorika, která se v tomto kurzu nebude probírat

Elementární funkce a jejich vlastnosti

Obsah tématu:

- Úpravy algebraických výrazů.
- Matematické symboly, operace s výroky.
- Funkce a jejich obecné vlastnosti.
- Lineární funkce.
- Kvadratická funkce.
- Lineární lomená funkce.
- Mocninná funkce.
- Logaritmická funkce, logaritmus a jeho využití.
- Goniometrická funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, součtové vzorce.

(toto všechno by měly vyplnit asi 3 dvouhodinovky)

Úvod do matematické logiky

Kvantifikátory:

Obecný kvantifikátor $\forall$ …$\forall x$ čteme „Pro všechna x platí…“:

Existenční kvantifikátor $\exists$ … $\exists x$ čteme „Existuje alespoň jedno x, pro které platí…“

Obecný a existenční kvantifikátory jsou vlastně obrácená písmena A a E.

Kvantifikátory v matematice používáme pro tvrzení, v nichž potřebujeme vymezit pro jak velkou množinu uvedená vlastnost platí.

Příklady:

„Každé celé číslo, pokud není prvočíslo, lze napsat jako součin dvou celých čísel.“
„Každý polynom stupně alespoň prvního má alespoň jeden komplexní kořen.“

(Jde o dvě důležité věty v matematice, jmenují se základní věta aritmetiky a základní věta algebry).

Výroky

Co je výrok?

Výrok je věta, u níž lze jednoznačně určit, zda je pravdivá nebo nepravdivá. I třeba tehdy, pokud to v dané situaci nemůžeme zjistit (výrok o budoucnosti, o vlastnosti věci, kterou nemáme k dispozici apod.).

Příklady:

Dávejte pozor! Stůj! Kolik je hodin? … nejsou výroky
Křída je zelená. Dvě a dvě jsou tři. Stroj je spuštěn. … jsou výroky

Pozor, mnoho výroků je subjektivních, neúplných (další podmínky jsou nevyřčené a je nutno si je domyslet z kontextu, za kterého jsou proneseny) nebo nejednoznačných (nejsou dobře definované pojmy, nebo jsou opět určeny z kontextu). Například:

Prší. Je mi zima. Je 12 hodin. Otevíráme v sobotu. Matematika je skvělá. Vesmír je nekonečný. Život má smysl. Bůh existuje.

V matematice takováto tvrzení jako výroky nepoužíváme, tam potřebujeme přesnost a jednoznačnost.

Složené výroky, logické operátory

¬ ∧ ∨ ⇒ ⇔

Jsou operátory v pořadí **negace**, logické **a** (konjunkce), logické **nebo** (disjunkce), **implikace** (A⇒B čteme „jestliže A pak B“) a **ekvivalence** (A⇔B čteme „A právě tehdy když B“ nebo také „A tehdy a jen tehdy když B“).

Operátory spojují dva výroky v jeden složený výrok (kromě negace, ta je unárním operátorem, lze jej aplikovat pouze na jediný výrok). Pravdivost a nepravdivost složených výroků uvádí následující tabulka (p označuje pravdivý výrok, n označuje nepravdivý výrok):

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A⇒B	A⇔B
n	n	p	n	n	p	p
n	p	p	n	p	p	n
p	n	n	n	p	n	n
p	p	n	p	p	p	p

Složené výroky

Příklady (zjistěte pravdivost složených výroků):

n n

1. První čtvereček je červený a druhý čtvereček je modrý.
2. První čtvereček je žlutý nebo druhý čtvereček je modrý.
3. Jestliže první čtvereček je žlutý, pak druhý čtvereček je zelený.
4. Jestliže první čtvereček je žlutý, pak druhý čtvereček je modrý.
5. Jestliže první čtvereček je červený, pak druhý čtvereček je žlutý.
6. První čtvereček je zelený právě tehdy, když druhý je žlutý.
7. $2 + 3 = 6 \Rightarrow 1 + 1 = 3$

Odpovědi:

pravda,
pravda,
pravda,
pravda,
nepravda,
pravda,
pravda.

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A⇒B	A⇔B
n	n	p	n	n	p	p
n	p	p	n	p	p	n
p	n	n	n	p	n	n
p	p	n	p	p	p	p

Úpravy algebraických výrazů

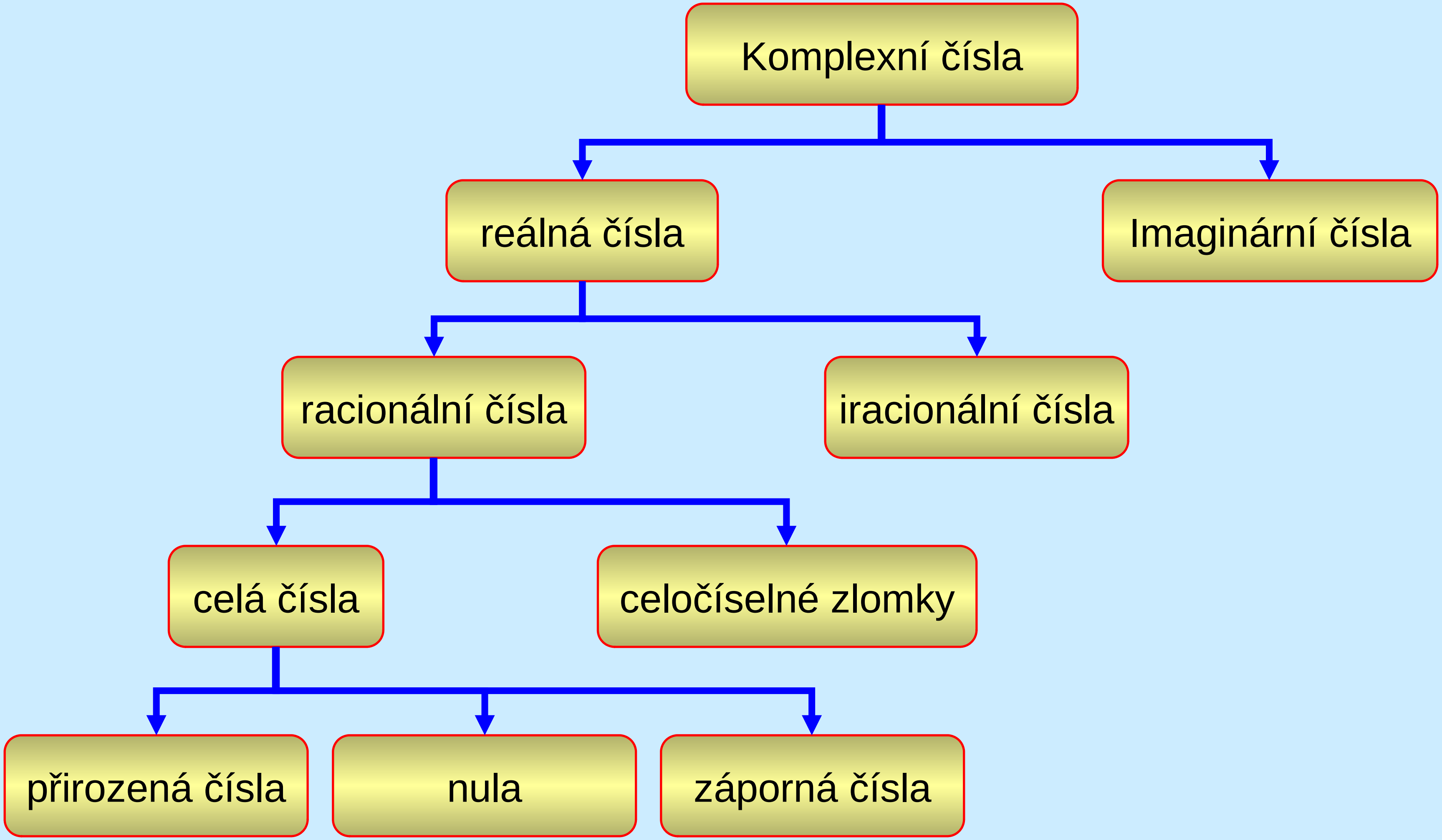
Objekty, s nimiž v pracujeme (podle historického vývoje):

věci → přirozená čísla → celá čísla → racionální čísla → reálná čísla

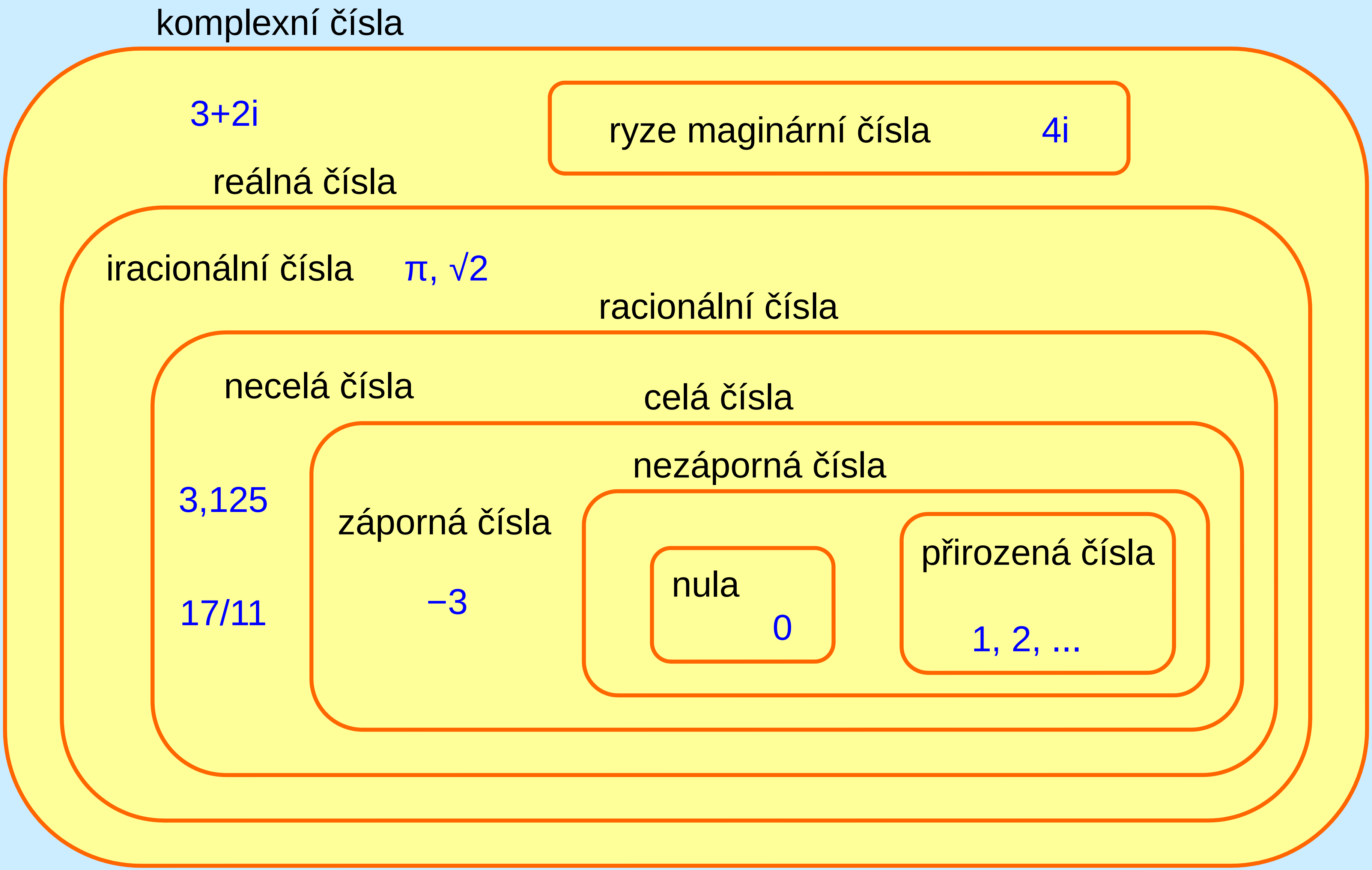
Každý krok ve zobecnění vychází z nějaké nové operace, která si vynutí zavedení obecnější množiny čísel. Je mnoho kroků v dalším zobecňování, komplexní čísla, počítání se symboly pro čísla ap.

operace	inverzní operace	důsledek pro množinu čísel
sčítání	**odčítání**	nutnost zavést záporná čísla a nulu, aby bylo definováno odečítání stejných čísel a větších čísel od menších
↓ (opakovaným použitím)		
násobení	**dělení**	nutnost zavést racionální čísla, jinak by nebyl obecně definován podíl celých čísel
↓ (opakovaným použitím)		
mocnění	**odmocňování**	nutnost zavést iracionální čísla, jinak by nebyla obecně definována odmocnina, k odmocnině záporného čísla viz později komplexní čísla

S jakými čísly pracujeme (řazeno hierarchicky)



S jakými čísly pracujeme (řazeno množinově)



Mocnina

$y = x^n$ … celočíselná mocnina … $= x.x\ldots x$ $\quad n$ *krát pronásobené* x

evidentně platí $x^m x^n = x^{m+n}$ a platí také $(x^m)^n = x^{m.n}$

(díky prvnímu vztahu můžeme zavést zápornou mocninu, zvolíme-li $n = -m$

a dostaneme $x^m x^{-m} = x^{m-m} = x^0 = 1$ *a tedy* $x^{-m} = 1/x^m$)

... chceme inverzní funkci: lze umocnit levou a pravou stranu $1/n$?

$y^{1/n} = (x^n)^{1/n} = x^{n.1/n} = x^{n/n} = x^1 = x$

zavedli jsme tak **odmocninu**, jako inverzní operaci k mocnině

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = y \Leftrightarrow x = y^n$

Mocninu s racionálním exponentem $a = m/n$ zavedeme jako

$x^a = x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$ kde obecně musí být $x \geq 0$.

Úpravy algebraických výrazů

Co je to algebra?

Je to část matematiky, v níž je určeno **s jakými** objekty pracujeme (množina) a **jak** s nimi pracujeme (operece + jejich vlastnosti).

Například algebra s reálnými čísly a s operacemi „+“ a „·“.

Co je to výraz?

Je to číselné nebo symbolické vyjádření matematických operací, ze kterého poznáme, jaké operace, v jakém pořadí a na jakých objektech máme provést, abychom získali výsledek.

Nutno si nacvičit a zafixovat různá pravidla, matematická (komutativita, asociativita, …) nebo konvenční, týkající se jen zápisu (různé zápisy téže operace, $ab = a.b = a{\cdot}b = a{\times}b$, zlomky, priorita operátorů, závorky, …).

Matematika by se dala přirovnat k jazyku, kde množina, se kterou pracujeme, představuje slova, operace se svými vlastnostmi odpovídají gramatickým pravidlům, jak můžeme slova skloňovat a řadit do vět a konvence zápisu výrazů odpovídá pravopisu.

Polynomy a operace s nimi

Polynom (mnohočlen) je obecný výraz typu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \, .$$

n … stupeň polynomu, $a_n \neq 0$

a_i … koeficienty,

x … proměnná.

S polynomy můžeme provádět řadu operací, lze je **sčítat**, **odčítat**, **násobit**, **dělit**, při dělení polynomů však již nemusí být výsledkem polynom.

- polynom jako funkce nebo jako výraz,
- kořeny polynomu, algebraické rovnice,
- operace s polynomy (sčítání, násobení, a k nim inverzní operace.

- Speciálně: dělení polynomů (početní postup)
- Speciálně: podíl dvou polynomů (jako racionální lomená funkce)
- Speciálně: kvadratický polynom (doplnění na úplný čtverec, vzorec pro kořeny)

Funkce a jejich vlastnosti (obecné)

Pojem funkce:

$y = \mathrm{f}(x)$, reálná funkce (jedné) reálné proměnné,

přiřazuje jednoznačně hodnotu y hodnotě x

- definiční obor D_f (*množina všech x, pro které existuje obraz*)
- obor funkčních hodnot H_f (*množina všech y, které jsou obrazem nějakého x*)

Vlastnosti:

- rostoucí $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) < \mathrm{f}(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in D_\mathrm{f}$
- klesající $>$
- nerostoucí $\geq$
- neklesající $\leq$
- prostá (vzájemně jednoznačné přiřazení $x <-> y$, existuje **inverzní funkce**)

  … (*uvedené vlastnosti mohou platit jen na nějakém intervalu*)
- sudá (*má symetrický graf podle osy y*) $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-x)\ \forall x \in D_\mathrm{f}$
- lichá (*má symetrický graf podle počátku*) $\mathrm{f}(x) = -\mathrm{f}(-x)\ \forall x \in D_\mathrm{f}$

Graf funkce

Příklady funkcí (konstantní, lineární, kvadratická, lineární lomená, …)

Prostá funkce

Funkce $\mathrm{f}(x)$ je **prostá**, platí-li:

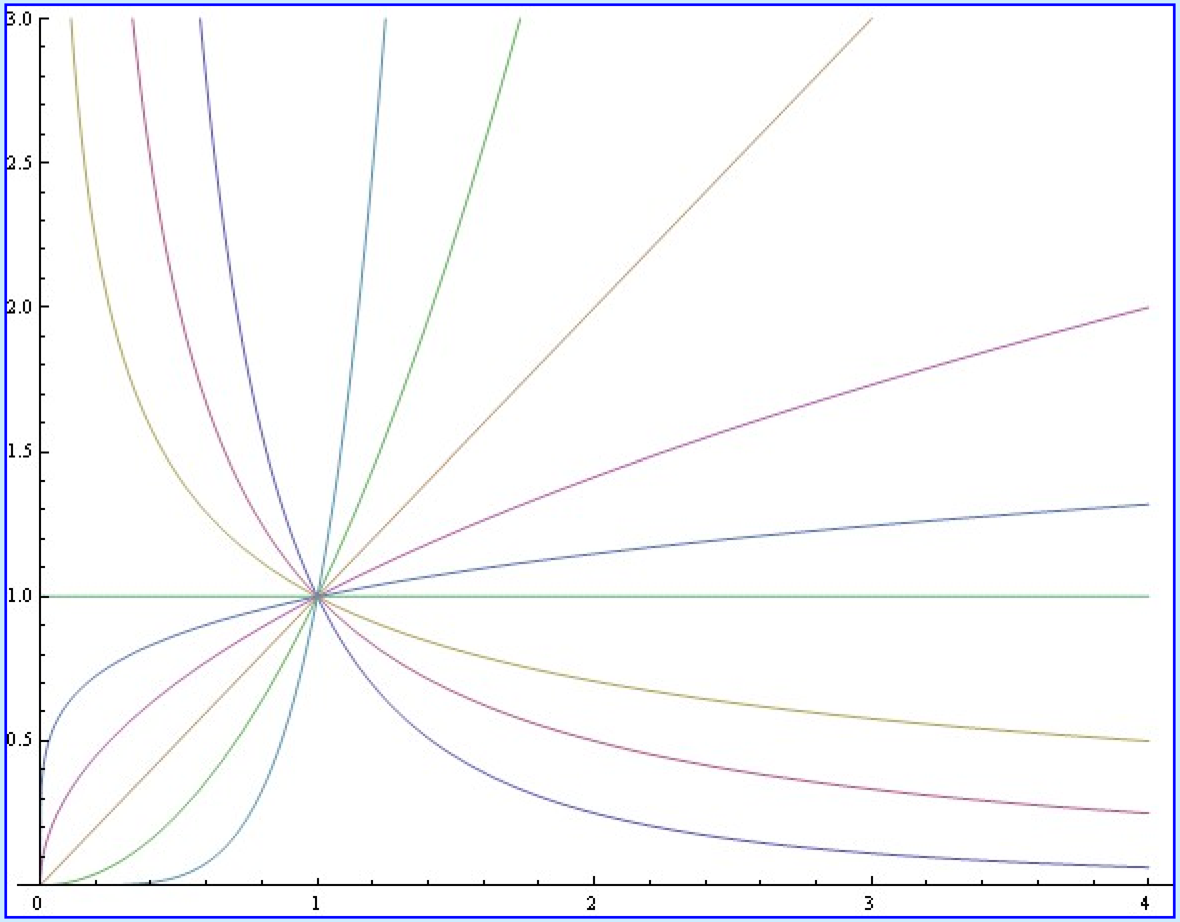
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) \neq \mathrm{f}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D_{\mathrm{f}} \quad .$$

Prostá funkce tedy nikdy nepřiřazuje dvěma různým bodům tentýž bod.
Někdy funkce nemusí být prostá na celém definičním oboru, může být však prostá na nějaké podmnožině z definičního oboru. Například funkce x^2 není prostá ale na podintervalech celé množiny reálných čísel, kdy $x < 0$ nebo $x >= 0$ je prostá.

Je-li $\mathrm{f}(x)$ prostá funkce, existuje k ní funkce inverzní $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

Mocninná funkce

$$f(x) = x^a, \quad x \geq 0, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$



$a =$ −2; −1; −0,5; 0; 0,2; 0,5; 1; 2; 5

Poznáte, který koeficient náleží které křivce?

Exponenciální funkce

Zavede se podobně jako mocninná funkce, kterou už známe,
proměnná však bude v exponentu:

$\mathrm{f}(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 0$ … exponenciální funkce se základem a.

Eulerovo číslo: získáme když připisujeme úrok x za nějaké období n krát.

Na konci období budeme mít na účtu $(1 + x/n)^n$ korun a pro rostoucí n do nekonečna, tj. jakoby se úročilo neustále, dostaneme právě Eulerovo číslo (při počátečním vkladu 1 Kč a úroku 1, tj. 100 %).

$\boldsymbol{e = 2{,}718281828459}$…. (jde o iracionální číslo)

Zavedeme $\mathrm{f}(x) = e^x$ … exponenciální funkce o základu e

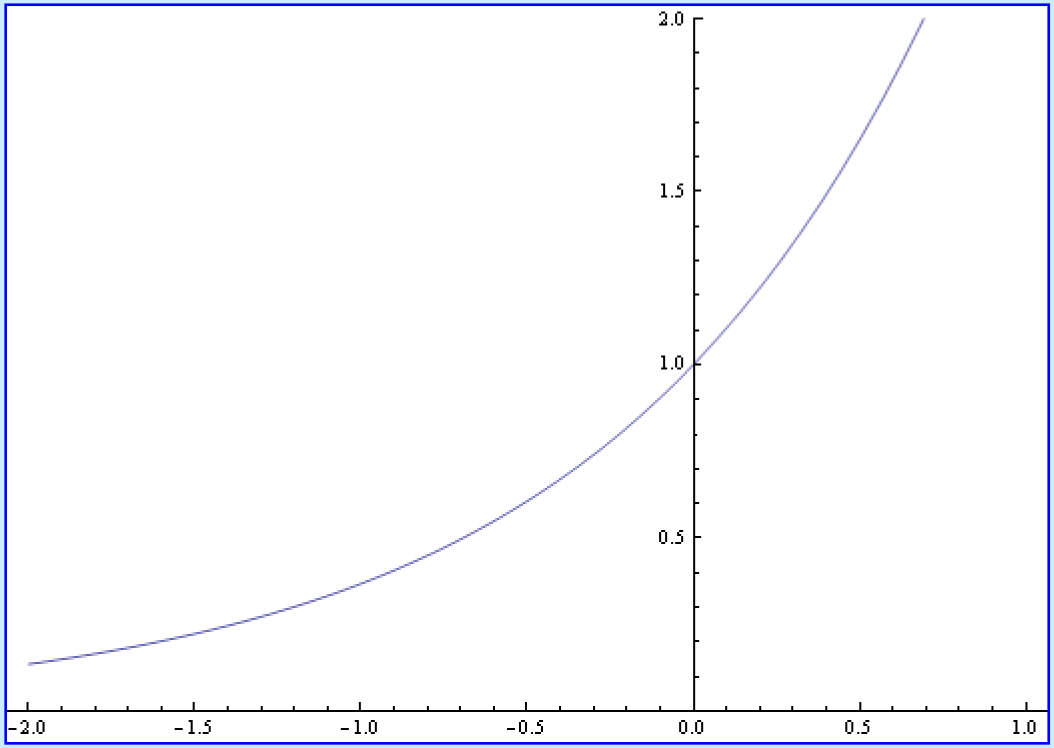
… má obzvlášť hezké vlastnosti, například:

- směrnice tečny v bodě x = 0 je rovna 1,

- derivováním dostaneme tutéž funkci

Exponenciální funkce

$$f(x) = e^x$$



$D_f = \mathbb{R}$, prostá na celém D_f.

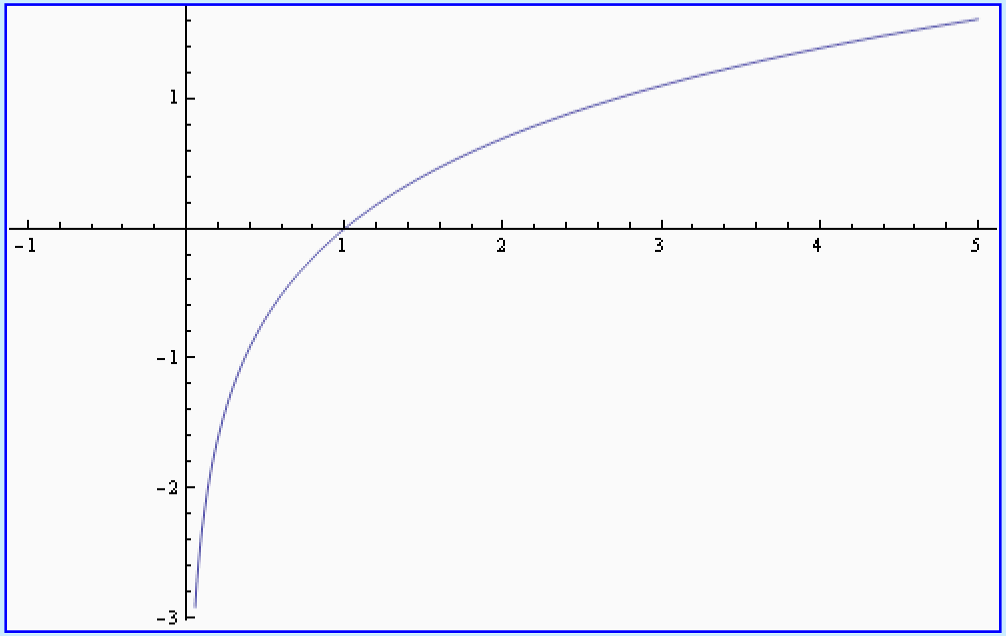
Logaritmická funkce

Zavede se jako inverzní funkce k exponenciální funkci:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$ … logaritmická funkce o základu a

Vlastnosti: $D_f = (0, \infty)$

$H_f = \mathbb{R}$



Užitečné vztahy:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

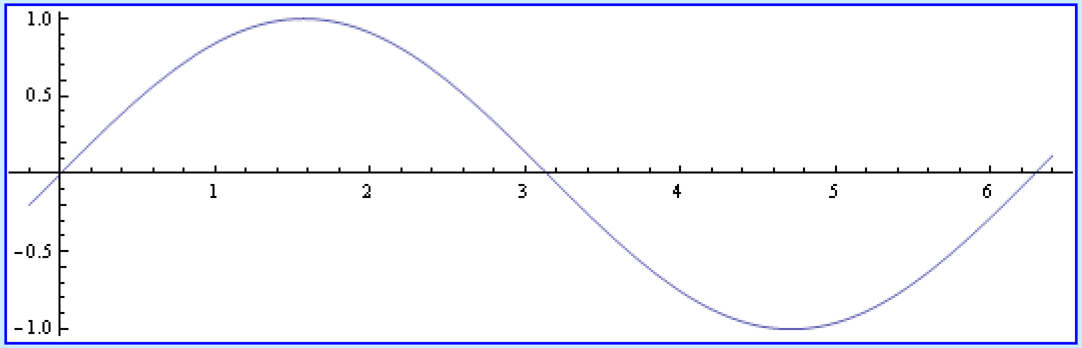
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

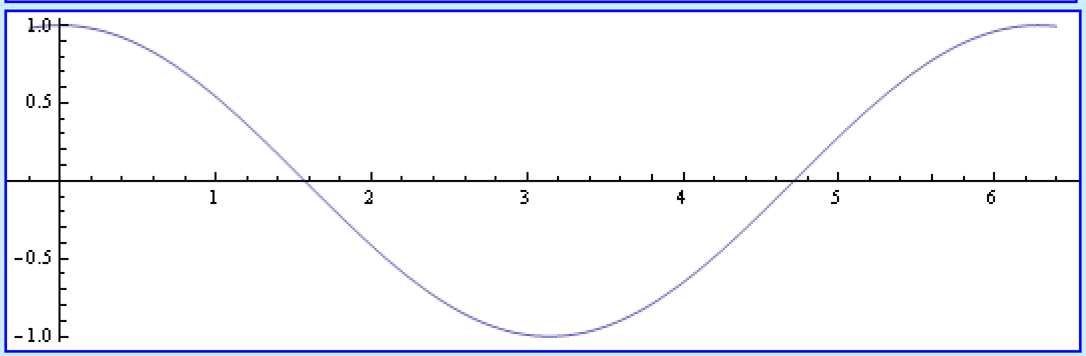
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Logaritmus a exponenciální funkce jsou prosté na celém definičním oboru a jedná se o inverzní funkce, které lze použít při úpravách rovnic jako ekvivalentní úpravy.

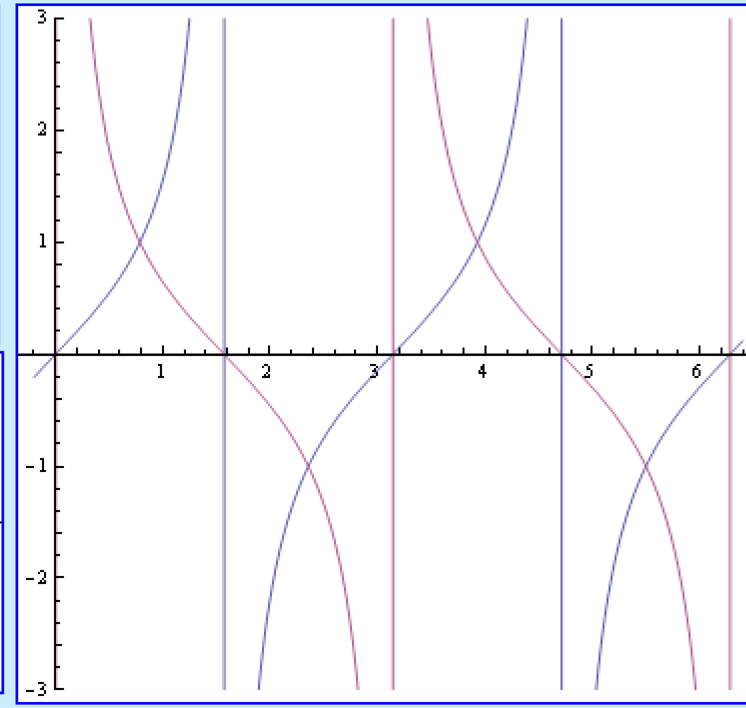
Goniometrické funkce

sin x, cos x





tg x, cotg x



Vlastnosti: jsou periodické, sin x *a* cos x *jsou definované na celém* $\mathbb{R}$, sin x *lichá,* cos x *sudá.*

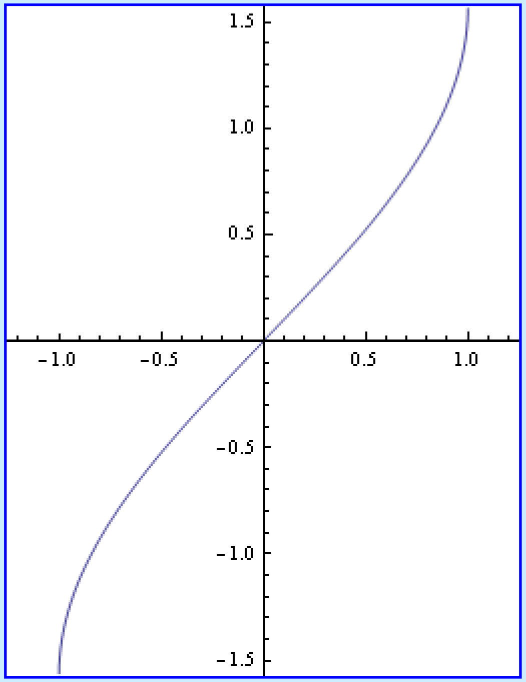
tg x *má definiční obor* $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ *a* cotg x $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Užitečné vzorce:

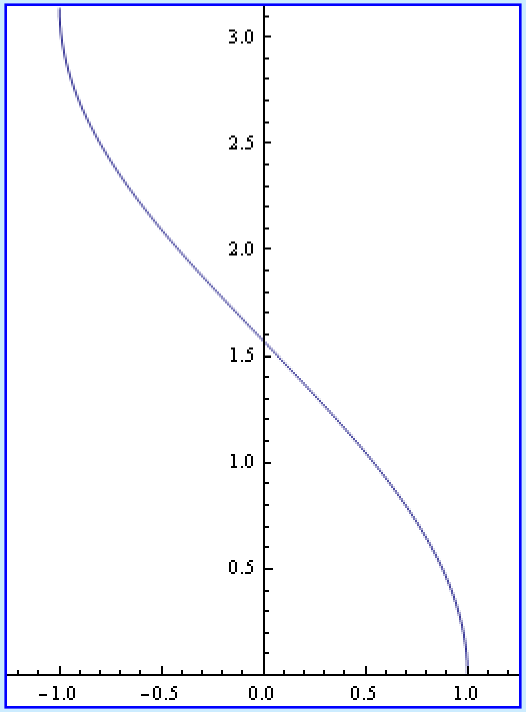
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Cyklometrické funkce

arcsin x,



arcos x



Vlastnosti:

arcsin x : $D_f = \langle -1, 1 \rangle$

$H_f = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

lichá,

arccos x : $D_f = \langle -1, 1 \rangle$

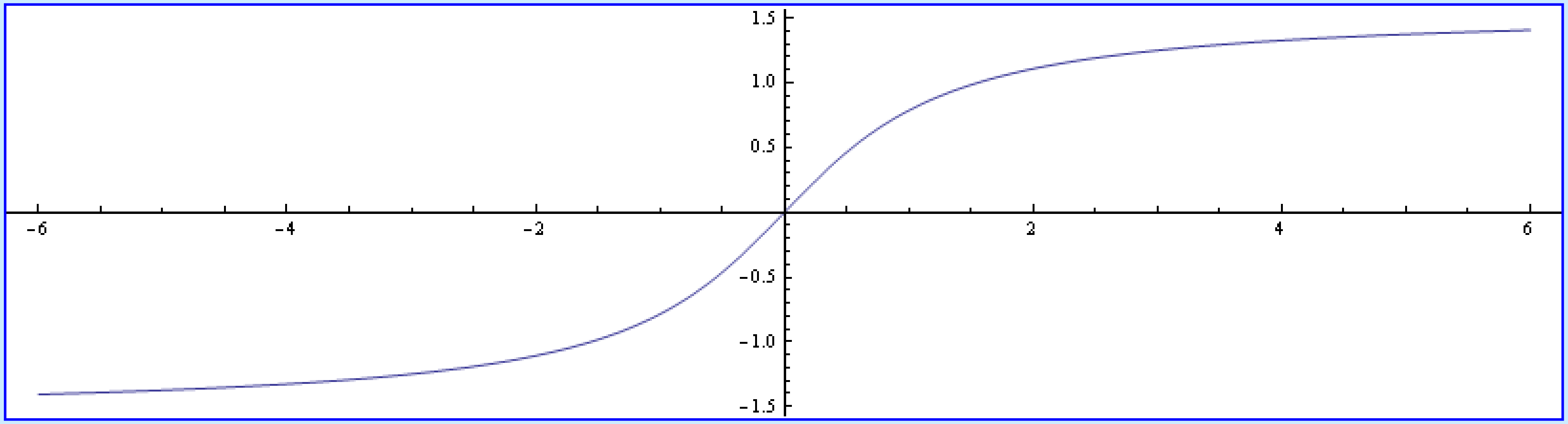
$H_f = \langle 0, \pi \rangle$

arctan x : $D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

lichá.

arctan x



Rovnice a nerovnice

- Řešení rovnic obecně, ekvivalentní úpravy
- Lineární rovnice a nerovnice, soustavy. Determinant.
- Nerovnice
- Rovnice s absolutní hodnotou.
- Iracionální rovnice
- Exponenciální a logaritmické rovnice.
- Goniometrické rovnice.

Postup při provádění neekvivalentních úprav:

Pozor na případy, kdy si buď si nechtěně vygenerujeme domnělé řešení navíc (například při umocňování – nutno provést zkoušku), nebo se naopak o nějaké řešení připravíme (například při odmocňování, kdy je nutno doplnit zápornou větev odmocniny).

Příklady viz http://math.feld.cvut.cz/0educ/priprava/, na semináři budeme řešit neřešení příklady z tohoto textu.

Soustavy lineárních rovnic

Jsou rovnice typu

$$ax + by = u$$
$$cx + dy = v$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ... koeficienty
$x, y \in \mathbb{R}$ ... proměnné
$u, v \in \mathbb{R}$ ... koeficienty pravé strany

Metody řešení:

a) Metoda sčítací

Rovnice vynásobíme vhodnými koeficienty tak, aby se po jejich sečtení jedna z proměnných odečetla. Získáme tak jednu rovnici o jedné neznámé. Po jejím vyřešení dosadíme toto řešení do libovolné z původních rovnic a vyřešíme zbývající proměnnou.

Příklad:

$$3x + 2y = 7$$
$$\oplus\ 4x - y = 2 \quad / \times 2$$
$$\overline{11x \quad = 11}$$
$$\underline{\underline{x = 1}}$$
$$3.1 + 2y = 7$$
$$2y = 4$$
$$\underline{\underline{y = 2}}$$

b) Metoda porovnávací

Členy s jednou proměnnou převedeme na jednu stranu a vynásobíme rovnice vhodnými koeficienty tak, aby obě rovnice měly na jedné straně tentýž výraz. Druhé strany pak položíme sobě rovny, čímž získáme jednu rovnici pro jednu neznámou. Dále viz a).

Příklad:

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - y = 2 \quad / \times (-2)$$
$$\overline{2y = 7 - 3x}$$
$$2y = -4 + 8x$$
$$\overline{7 - 3x = -4 + 8x}$$
$$\underline{\underline{x = 1}}$$

a dále stejně jako v a)

c) Metoda eliminační

Z jedné rovnice vyjádříme jednu proměnnou, získaný výraz dosadíme do druhé rovnice, čímž dostaneme jednu rovnici pro jednu neznámou. Další postup je shodný s postupem v bodě a). Tuto metodu je možné použít někdy i pro složitější rovnice než lineární.

Příklad:

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - y = 2 \rightarrow y = 4x - 2$$

dosadíme do 1. rovnice:

$$3x + 2(4x - 2) = 7$$
$$11x = 11$$
$$\underline{\underline{x = 1}}$$

a dále stejně jako v a)

Soustavy lineárních rovnic - determinant

Nabízí se otázky typu:

- Existuje vždy řešení?
- Nemůže výpočet při určitých hodnotách koeficientů selhat?
- Nemůže existovat více řešení? Apod.

Zkusme soustavu $\begin{aligned} ax+by&=u \\ cx+dy&=v \end{aligned}$ vyřešit zcela obecně.

Řešení (viz výpočet vpravo) můžeme napsat ve tvaru $x=\dfrac{ud-bv}{D}$, $y=\dfrac{av-cu}{D}$

kde $D=ad-cb$ je *determinant*. Ten musí být nenulový, jinak uvedené vzorce nemohou platit.

Význam determinantu:

1. $D\neq 0$ Soustava rovnic má jediné řešení, které lze vyjádřit předchozími nalezenými vzorci,

2. $D=0$ Soustava může mít nekonečně mnoho řešení nebo řešení nemusí existovat. O tom, který případ nastane, rozhodují koeficienty na pravé straně u a v.

$$\begin{aligned} ax+by&=u \qquad /\times c \\ \oplus\ cx+dy&=v \qquad /\times(-a) \end{aligned}$$

$$(cb-ad)\,y=cu-av$$

$$\underline{\underline{y=\frac{av-cu}{ad-cb}}}$$

$$ax+b\frac{av-cu}{ad-cb}=u$$

$$ax=u-b\frac{av-cu}{ad-cb}$$

$$ax=\frac{u(ad-cb)-bav+bcu}{ad-cb}$$

$$ax=\frac{uad-\cancel{ucb}-bav+\cancel{bcu}}{ad-cb}$$

$$ax=\frac{uad-bav}{ad-cb}$$

$$\underline{\underline{x=\frac{ud-bv}{ad-cb}}}$$

Rovnice s absolutní hodnotou

Jsou rovnice obsahující výrazy v absolutních hodnotách.

Postup řešení:

Rovnici řešíme u každé absolutní hodnoty zvlášť pro případ, kdy je výraz v absolutní hodnotě nezáporný a kdy je záporný. V každém z obou případů dostaneme jinou rovnici, protože absolutní hodnota v prvním případě nezmění a ve druhém změní znaménko výrazu.
Pro každý případ rovnici vyřešíme a najdeme průnik řešení rovnice a podmínky pro výraz v absolutní hodnotě. Výsledné řešení pak je sjednocením všech dílčích řešení.

V případě více absolutních hodnot se nám tak postup řešení rozdělí na další dvě části vždy s každou další absolutní hodnotou, tj. například u dvou absolutních hodnot máme čtyři větve řešení, kde musíme v každé větvi vždycky vyřešit rovnici spolu s podmínkou. Někdy ale některá kombinace podmínek je prázdná množina, u lineárních rovnic toto dokonce nastane vždy, čehož můžeme využít a snížit tak hned na začátku množství větví.

Příklad:

$$|3x+1| - 6x + 3 = |x|$$

$3x + 1 \geq 0$		$3x + 1 < 0$	
$x \geq 0$	$x < 0$	$x \geq 0$	$x < 0$
$3x + 1 - 6x + 3 = x$ $-4x = -4$ $x = 1$ splňuje podmínky	$3x + 1 - 6x + 3 = -x$ $-2x = -4$ $x = 2$ nesplňuje podmínky, řešení neexistuje	není možno splnit	$-(3x + 1) - 6x + 3 = -x$ $-8x = -2$ $x = 1/3$ nesplňuje podmínky, řešení neexistuje

Výsledné řešení je sjednocení jednotlivých řešení, tedy $x = 1$.

Rovnice neřešitelné konečným počtem operací

Příklad takové rovnice: $e^x - 5x = 1$

Rovnici nelze řešit logaritmováním levé a pravé strany, při takovém postupu obdržíme jednu neznámou v logaritmu a druhou mimo logaritmus a převedeme jen exponenciální rovnici na logaritmickou, stejně obtížně řešitelnou.

Nalezení přibližného řešení (tzv. *prostou iterační metodou*):
Z rovnice vyjádříme neznámou x, vybereme si její první výskyt v exponenciále:

$$x = \ln(5x + 1)$$

Kdybychom nyní dosadili řešení (což nemůžeme, jelikož jej neznáme), byla by i tato rovnice splněna, neboť je z hlediska řešení se zadanou rovnicí ekvivalentní (použili jsme jen ekvivalentní úpravy). Zkusme nyní nějaké x zvolit a dosazením do pravé strany ověřit, jak se bude řešení blížit. Obdržíme novou hodnotu x a tu můžeme znovu dosadit do levé strany. Postup výpočtu je následující:

a) x_0 volíme libovolné (snažíme se co nejblíž řešení, pokud jej lze odhadnout),

b) další hodnoty x vypočítáme z iterační rovnice $x_{i+1} = \ln(5x_i + 1)$,

c) při požadované přesnosti výpočet ukončíme a dané x_i prohlásíme za přibližný výsledek.

Všimněte si, že jsme obdrželi po 19 iteracích výsledek s přesností na 9 platných míst, pro praxi více než dostačující výsledek.

iterace	hodnota
0	2,00000000
1	2,39789527
2	2,56413952
3	2,62616729
4	2,64835939
5	2,65618109
6	2,65892336
7	2,65988302
8	2,66021863
9	2,66033598
10	2,66037701
11	2,66039135
12	2,66039636
13	2,66039812
14	2,66039873
15	2,66039894
16	2,66039902
17	2,66039904
18	2,66039905
19	2,66039906
20	2,66039906
21	2,66039906
22	2,66039906

Rovnice neřešitelné konečným počtem operací

Při řešení obtížnějších rovnic můžete použít také Wolfram Alpha server
(server tvůrců programu pro symbolické výpočty Mathematica).

Tento server se snaží porozumět matematickým, fyzikálním, technickým a ekonomickým zadáním s volnou syntaxí.

Předchozí úlohu byste například zadali takto: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+e%5Ex+-+5x+%3D+1

Zkuste se také podívat na vzorce pro výpočet kořene polynomu 2., 3. a 4. stupně (stačí zadat rovnici s obecnými koeficienty):

- Kvadratická rovnice: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E2+%2B+bx+%2Bc++%3D+0
- Kubická rovnice: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E3+%2B+b+x%5E2+%2Bcx+%2Bd+%3D+0
- Rovnice 4. stupně: http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E4%2B+b+x%5E3+%2Bc+x%5E2+%2Bd+x%2Be+%3D+0
- Rovnice 5. stupně (pro ní již přesný vzorec pro řešení neexistuje): http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+a+x%5E5%2B+b+x%5E4+%2Bc+x%5E3+%2Bd+x%5E2%2Be+x+%2Bf%3D+0

Pozor, server používá odlišné označení logaritmů než jaké se vyskytuje v českých učebnicích. lg je náš „desítkový“ logaritmus log a log je náš přirozený logaitmus ln. Před zadáním si raději ověřte, zda používáte správný symbol, například zadáním lg 10 či lg *e*.

Posloupnosti

Posloupnost můžeme zavést jako množinu očíslovatelných prvků, tj.
$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ale kvůli očíslování je lépe ji zavést jako *funkci* s definičním oborem omezeným na množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$, nezapisujeme však $\mathrm{f}(i)$ ale indexujeme a_i.

Vyjádření posloupnosti:

- základním vzorcem, například $a_i = 2^i - 1$
- rekurentním vzorcem, například $a_{i+1} = 2a_i + 1,\ a_1 = 1$ (zde musíme zadat první člen posloupnosti)

(*oba vzorce definují stejnou posloupnost,* 1, 3, 7, 15, 31, ….)

Vlastnosti posloupností:

- konstantní, rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, … (intuitivně snadno pochopitelné, o co jde)
- omezená: $\exists K \in \mathbb{R}: \ |a_i| \leq K \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Číslo L je limita posloupnosti a_i, existuje-li pro každé ε číslo n takové, že platí $|a_i - L| < \varepsilon, \ \forall i > n$.

Posloupnost konverguje, má-li limitu, posloupnost diverguje, nemá-li limitu.

Limitu označujeme symbolem

$$\lim_{i \to \infty} a_i = L$$

Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností
(operace provádíme po členech, například $c_i = a_i + b_i$)
se rovna součtu, rozdílu, součinu a podílu limit jednotli-vých posloupností, musí však jednotlivé limity existovat
a limita posloupnosti v podílu nesmí být nulová.

Aritmetická a geometrická posloupnost

Aritmetická posloupnost má konstantní *rozdíl* mezi členy, tj. $a_{i+1} - a_i = d$

například 1, 4, 7, 10, 13, 16, … zde diference d je rovna 3

- aritmetická posloupnost je rostoucí, je-li $d > 0$, klesající, je-li $d < 0$
- přímý vzorec: $a_i = id + b$
- rekurentní vzorec: $a_{i+1} = a_i + d$
- $s_n = s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Tento vzorec našel matematik Carl Friedrich Gauss (1777−1855) již na základní škole, když se jeho učitel pokoušel zabavit žáky na nějakou dobu tak, že jim zadal sečíst všechna celá čísla od 1 do 100. Gauss ohlásil překvapenému učiteli výsledek za několik minut.

Geometrická posloupnost má konstantní *podíl* mezi členy, tj. $a_{i+1} / a_i = q$

například 1, 5, 25, 125, 625, … zde kvocient q je roven 5

- geometrická posloupnost je rostoucí, je-li $q > 0$, klesající, je-li $0 < q < 1$, oscilující, je-li $q < 0$
- přímý vzorec: $a_i = a_1 q^{i-1}$
- rekurentní vzorec: $a_{i+1} = a_i q$

$$s_n = a_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

lze odvodit ze snadno ověřitelné identity
$(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$

Pokud je $|q| < 1$, s_n konverguje a platí:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Užitečný a často potřebný vzorec pro součet geometrické posloupnosti.

Řady

Nekonečná řada je součet členů nekonečné posloupnosti, tj.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad .$$

Ale pozor! Záleží zde na pořadí členů vlevo, sčítat je nutno v předepsaném pořadí, konečný součet sčítanců je po dvojicích komutativní operace ale nekonečný počet komutací součet může změnit. Nekonečná řada konverguje, pokud konverguje posloupnost částečných součtů

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Pak existuje součet řady jako limita posloupnosti částečných součtů a označujeme

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s \quad ,$$

Kde s je součet řady, získaný jako

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n \quad .$$

Příklady:

- řada s konstantní posloupnosti 1 + 1 + 1 + … diverguje, protože posloupnost s_n neomezeně roste
- řada 1 + 2 + 3 + 4 + … diverguje, protože posloupnost částečných součtů s_n neomezeně roste,
- řada 1 − 1 + 1 − 1 + … diverguje, protože s_n nemá limitu,
- řada 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + … konverguje, jak se najde její součet viz další snímek.

Příklad na součet geometrické řady

Zadání: Spočítejte součet nekonečné řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$.

Řešení: Kvocient je ½, první člen je také ½, dosazením do vzorce pro součet geometrické řády dostaneme

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \ .$$

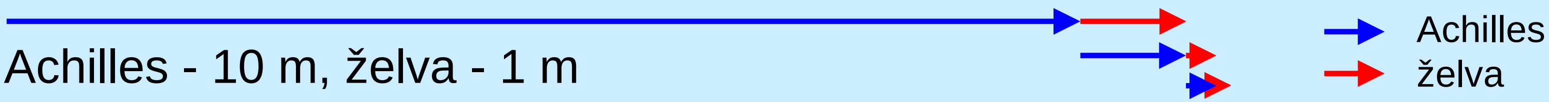
i	a_i	s_i
1	0,5	0,5
2	0,25	0,75
3	0,125	0,875
4	0,0625	0,9375
5	0,03125	0,96875
6	0,015625	0,984375
7	0,0078125	0,9921875
8	0,00390625	0,99609375
9	0,001953125	0,998046875
10	0,0009765625	0,9990234375
11	0,00048828125	0,99951171875

Potíže s nekončnou řadou v antice

Dožene Achiles želvu?

Zenon Elejský 450 př.n.l.:

Rychlejší Achilles nikdy nedohoní pomalejší želvu!
Uspořádejme závod Achilla a želvy za podmínek:
- želva má 100 metrový náskok před Achilem
- Achiles, je 10 x rychlejší než želva.
- želva a Achiles vyběhnou ve stejný okamžik

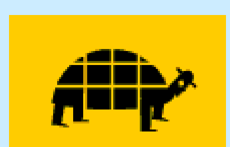


1. Achilles - 10 m, želva - 1 m
2. Achilles - 1 m, želva – 0,1 m
3. Achilles – 0,1 m, želva – 0,01 m
4. Achilles – 0,01 m, želva – 0,001 m
5. Achilles – 0,001 m, želva – 0,0001 m
6. Achilles – 0,0001 m, želva – 0,00001 m
7. Achilles – 0,00001 m, želva – 0,000001 m
8. Achilles – 0,000001 m, želva – 0,0000001 m
9. Achilles – 0,0000001 m, želva – 0,00000001 m
10. Achilles – 0,00000001 m, želva – 0,000000001 m
11. Achilles – 0,000000001 m, želva – 0,0000000001 m
12. Achilles – 0,0000000001 m, želva – 0,00000000001 m
13. Achilles – 0,00000000001 m, želva – 0,000000000001 m
14. Achilles – 0,000000000001 m, želva – 0,0000000000001 m

Řešení: Achilles dožene želvu po uražení dráhy

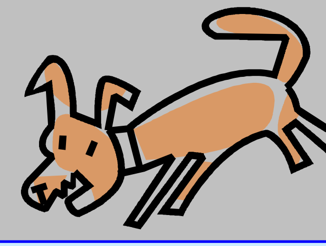
$$s=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_0}{10^k}=s_0\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}s_0$$

Součet nekonečného počtu čísel může být konečný



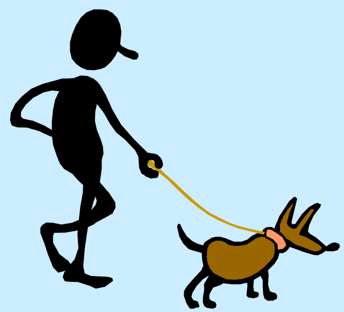
$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\frac{1}{1-q};\quad |q|<1$$

Úloha o psovi

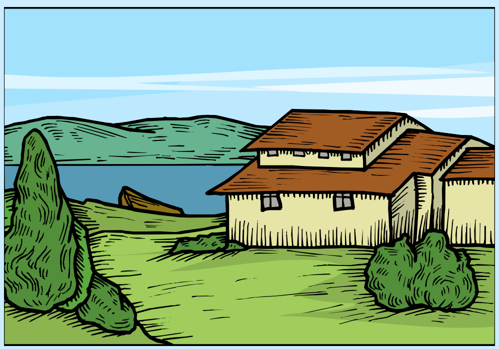


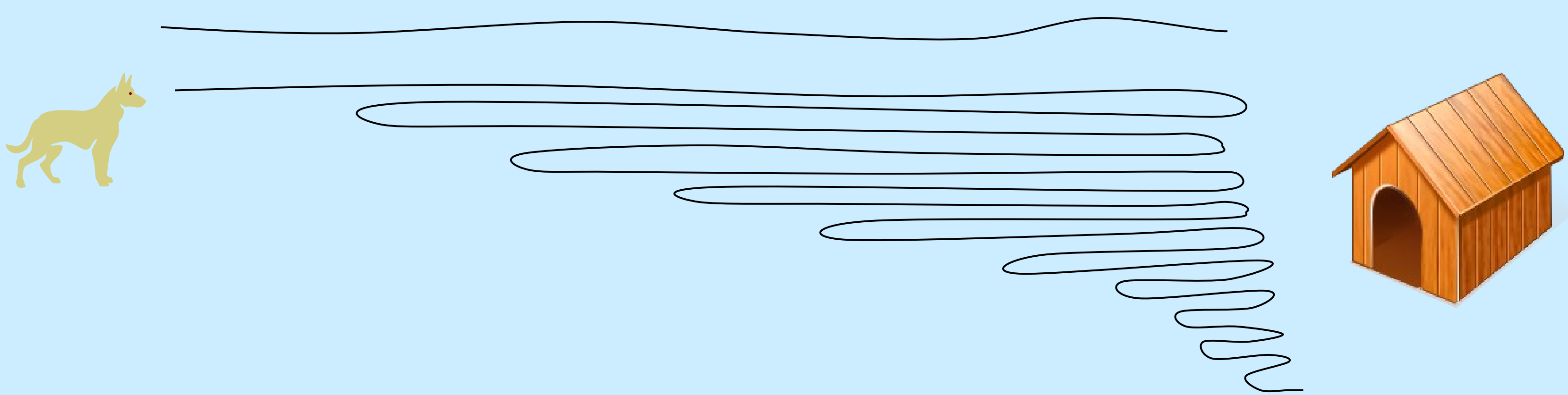
Z bodu A směrem k bodu B (domů), vyjde muž se psem na 12 km dlouhou cestu rychlostí 4 km za hodinu. Společně s ním vyběhne pes a běží až k domovu. Tam se otočí a běží zpět naproti pánovi, který za tu dobu popošel o kus dále. U pána se opět otočí a běží k domovu a zpět a tak pořád dokola. Pes běhá rychlostí 15 km za hodinu. Kolik kilometrů naběhá pes?

A



B





Důkaz matematickou indukcí

Účel:

Potřebujeme dokázat správnost vzorce pro n-tý člen posloupnosti z rekurentního vzorce.

Postup:

1. Dokážeme platnost pro $n = 1$.
2. Ze vztahu pro a_n odvodíme dosazením rekurentního vztahu a algebraickými úpravami týž vztah, kde místo n je $n + 1$. Protože za n si můžeme dosadit postupně 2 (pro $n = 1$ je již platnost dokázána), 3, 4, … , vztah tedy musí platit pro všechna n a tím je důkaz hotov.

Příklad:

Dokažme vzorec pro součet prvních n čtverců přirozených čísel $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Pro $n = 1$ vzorec evidentně platí, po dosazení 1 = 1.

2. Rekurentní vzorec je (přidání dalšího čtverce): $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$. Dosaďme do dokazovaného vzahu:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}.$$

Výraz napravo se rovná dokazovanému vztahu pro $n + 1$ místo n a tedy musí platit pro všechna n počínaje $n = 1$. Tím je důkaz hotov.

Příklady na úplnou indukci

Dokažte, že n rovnými řezy můžete rozříznout pizzu na $\frac{n(n+1)}{2}+1$ kousků.

(Nápověda: uvažujte, že n-tým řezem, vhodně vedeným, můžete zvětšit počet kousků o n.)

Dokažte, že součet posloupnosti třetích mocnin celých čísel počínaje 1 je $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Dokažte Gaussův vzorec, že součet prvních n přirozených čísel je $\frac{n(n+1)}{2}$.

Dokažte, že $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.11}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

Jaký bude součet členů do nekonečna?

Analytická geometrie v rovině

Geometrické objekty popisujeme algebraickými výrazy a rovnicemi, v nichž proměnné x a y představují souřadnice v kartézské souřadnicové soustavě. Geometrické úlohy se převádějí na algebraické, například průsečík(y) dvou objektů lze nalézt jako řešení soustavy rovnic.

Bod: $A = [A_x, A_y]$

Směrový vektor: $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y)$ … nemá definováno působiště

Přímka:

Prametrické vyjádření: $X = A + t\mathbf{s}$

Po složkách: $[x, y] = [A_x, A_y] + t(s_x, s_y)\ ,\quad t \in \mathbb{R}\,,$

Po složkách jednotlivě: $x = A_x + ts_x\ ,\ \ y = A_y + ts_y\,,$

… vhodné je-li zadán bod a směrový vektor.

Obecná rovnice přímky: $ax + by + \mathrm{c} = 0$

… kompaktnější zápis, neobsahuje parametr t a souřadnice x a y jsou nevyjádřené.

Úseková rovnice přímky: $x/p + y/r = 1$

… p a r jsou body, ve kterých přímka protíná osu x a y

… rovnice není schopna popsat přímku, která prochází počátkem, pro ní by oba parametry byly nulové.

Směrnicová rovnice přímky: $y = kx + q$

… k je směrnice, určuje sklon přímky, q je kvocient, určuje posunutí přímky ve směru osy y

… rovnice není schopna popsat svislou přímku, pro ní by směrnice vycházela nekonečná.

Kuželosečky

Kuželosečkou rozumíme kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu. Algebraicky jde o takové rovinné útvary, které splňují algebraickou rovnici obsahující první a druhé mocniny x a y.

Obecná rovnice kuželosečky **(v základním tvaru,** jen touto se budeme zabývat**)** tedy je:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0;\ a, b, c, d, e \in \mathbb{R};\ a \neq 0 \vee b \neq 0 .$$

Pokud by současně a a b bylo nulové, dostali bychom rovnici přímky.

Poznámka: kuželosečka v **obecném tvaru**, kdy také předpokládáme otočení vůči základnímu tvaru:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0;\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R};\ a \neq 0 \vee b \neq 0 .$$

Členy na levé straně první rovnice lze pro nenulové a a b upravit na úplný čtverec, dostaneme

$$a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + g = 0;\ a, b, g \in \mathbb{R} .$$

Substitucemi $\tilde{x} = x - x_0$ a $\tilde{y} = y - y_0$ a vydělením g dostaneme jednodušší tvar

$$\eta\tilde{x}^2 + \mu\tilde{y}^2 + 1 = 0;\ \eta, \mu \in \mathbb{R} .$$

Poznámka:

Substituce za proměnné s vlnkou geometricky znamenají, že přecházíme do posunutých proměnných tak, že do místa (x_0, y_0) položíme počátek nové souřadnicové soustavy s proměnnými $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$.

Kružnice, elipsa, hyperbola

Kuželosečky budeme psát v základním středovaném tvaru, tj. se středem v počátku.

Souhrnný tvar rovnice pro **kružnici**, **elipsu** a **hyperbolu** je:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;\ a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

.

a a b … velká a malá poloosa.

Znaménka: + pro elipsu, – pro hyperbolu.

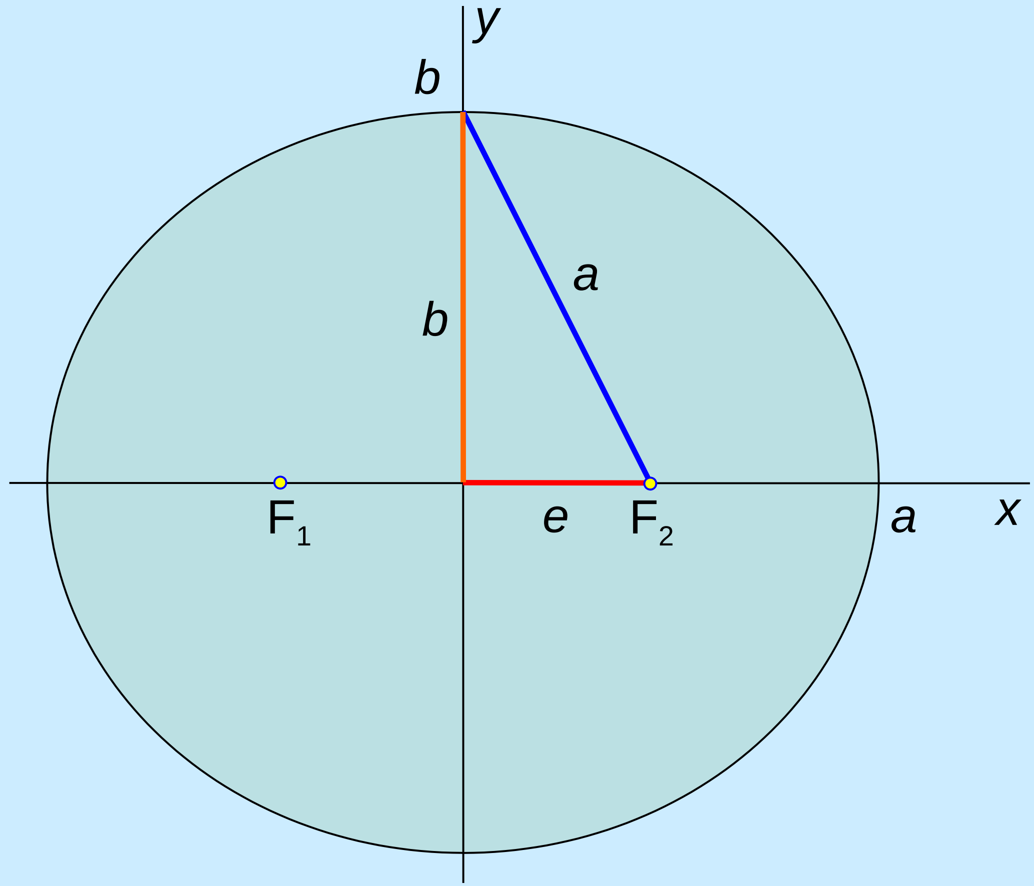
Pokud je $a = b = R$, jde o kružnici.

Rovnice pro tečnu dotýkající se kuželosečky v bodě $T = [T_x; T_y]$:

$$\frac{xT_x}{a^2} \pm \frac{yT_y}{b^2} = 1$$

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ...excentricita

$\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ ... numerická excentricita



Komplexní čísla

- Formální zavedení komplexních čísel, axiomy,
- ověření že $(a, 0)\times(b, 0) = (ab, 0)$, tj. že první složka se chová z hlediska součinu jako reálné číslo,
- ověření, že $(0, 1)^2 = (-1, 0)$,
- motivace, proč byla komplexní čísla zavedena, označení $1 = (1, 0)$, $\mathrm{i} = (0, 1)$,
- algebraický tvar komplexního čísla $c = a + \mathrm{i}b$, základní operace a úpravy,
- komplexně sdružené číslo, $\overline{c} = a - \mathrm{i}b$, vzorec $c\overline{c} = a^2 + b^2$, $c + \overline{c} = 2a$,
- geometrická reprezentace komplexního čísla,
- goniometrický tvar komplexního čísla, modul, argument, hlavní hodnota argumentu,
- Moivreova věta, násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru,
- odmocnina z komplexního čísla, nejednoznačnost výsledku.

Zavedení komplexních čísel

Motivace:

Ne všechny rovnice s mocninou, kde neznámá *x* se vyskytuje v rovnici jen jednou, mají řešení v oboru reálných čísel. Komplexní čísla vzešly ze snahy rozšířit reálná čísla na obsáhlejší nadmnožinu, ve které budou mít řešení i rovnice s mocninami, u nichž inverzní operace vedou na odmocninu ze záporného čísla.

Definice:

Algebra komplexních čísel je množina všech uspořádaných dvojic { (a, b) ∈ ℜ }
s definovanými operacemi { =, +, × } (rovnost, součet a součin) splňujícími vlastnosti

- rovnost: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d,$
- součet: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$
- součin: $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$

Základní vlastnosti:

Snadno ověříme z definice, že komplexní čísla typu $(a,0)$ se chovají jako reálná čísla:
Stačí ověřit součin: $(a,0)\times(b,0)=(ab-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot b)=(ab,0)$, rovnost a součet jsou zřejmé.
Také snadno ověříme $(0,1)^2=(0,1)\times(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$.

Poslední vlastnost je klíčová, podle ní v oboru komplexních čísel tedy existuje číslo, jehož druhá mocnina je záporná. Taková vlastnost se neobjevuje u žádného reálného čísla.

Algebraický tvar komplexního čísla

Vzhledem k naposledy ověřeným vlastnostem můžeme komplexní čísla typu $(a,0)$ ztotožnit s „obyčejným“ reálným číslem a, speciálně číslo $(1,0)$ bude „obyčejná“ jednička 1, podobně pro číslo $(0,1)$ zavedeme speciální, nový symbol i a nazveme ho **imaginární jednotkou**. Komplexní číslo pak můžeme napsat ve tvaru vhodnějším pro počítání jako

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (1,0)\times(a,0) + (0,1)\times(b,0) = a + \mathrm{i}b,$$

což nazveme jako **algebraický tvar** komplexního čísla z, kde a je jeho **reálná část** a b je jeho **imaginární část**.

$$\boxed{z = (a, b) = a + \mathrm{i}b}$$

Komplexní čísla tvaru $0 + \mathrm{i}b = \mathrm{i}b$ (nulu psát nemusíme) nazýváme **imaginární čísla**.

Množinu komplexních čísel označujeme jako $\mathcal{C}$.

Algebraický tvar umožňuje s komplexními čísly pracovat naprosto stejně, jako jsme byli zvyklí u čísel reálných. Obvyklé vlastnosti operací sčítání a násobení jako komutativita, asociativita a distributivní zákony zůstanou zachovány, přibude navíc jediné pravidlo pro imaginární jednotku $\mathrm{i}^2 = -1$.

Goniometrický tvar komplexního čísla

$$z = a + \mathrm{i}b = |z|\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)$$

|z| je velikost nebo také modul komplexního čísla, α je argument.
Komplexní číslo této interpretaci představuje bod v rovině nazývané Gaussova rovina, se souřadnicemi (a, b). Dvojice čísel (|z|, α) pak jsou jeho polární souřadnice.

Moivreova věta:

Je vztah pro celočíselnou mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru:

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha\right)$$

Dokazuje se úplnou indukcí, musíme však mít odvozené velmi obecné vzorce mezi goniometrickými funkcemi různých argumentů, které přesahují rámec středoškolské matematiky. Snadno se však přesvědčíme například o jeho platnosti pro n = 2.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$z_1 z_2 = |z_1|\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)|z_2|\left(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta\right) = |z_1||z_2|\left[\cos\left(\alpha+\beta\right) + \mathrm{i}\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = |z_1|\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right) / |z_2|\left(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta\right) = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) + \mathrm{i}\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

Exponenciální tvar komplexního čísla

$$\boxed{z = a + \mathrm{i}b = |z|\mathrm{e}^{i\alpha}}$$

Exponenciání tvar je výhodný pro násobení a dělení a s nimi složené operace, tedy umocňování a odmocnování. Používáme známé vztahy pro počítání s mocninami, tak, jak je známe z algebry s reálnými čísly. Například násobení:

$$z_1 z_2 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,|z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$$

Poznámka:
Správnost exponenciálního zápisu komplexního čísla lze odvodit za pomoci rozvoje funkcí sin( ), cos( ) a exp( ) do mocninných řad. To by však bylo nad rámec středoškolského učiva. Tento rozvoj se probírá v prvních semestrech základních univerzitních kurzů matematiky, nazývá se Taylorovou řadou. Jak řady vypadají bylo ukázáno bez odvozování na webináři.

Odvození některých vzorců

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

ale také $e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$, porovnáním reálné a imaginární části

dostaneme vzorce
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \quad .$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha$$

ale také $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, porovnáním reálné a imaginární

části dostaneme vzorce
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\beta \quad .$$

Tyto vztahy by šlo snadno zobecnit na vztahy pro obecnou mocninu n.

Vyjádření funkcí sinus a cosinus

Vezměme dvě jednotková komplexně sdružená čísla

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$,

ta sečtěme a v druhém případě odečtěme a získáme vzorce

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2},\quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$