Fyzika 1 B3B02FY1, vybrané řešené příklady

***Semestr:** letní, 2019/20, **Vyučující:** Martin Žáček, **Datum:** 2020-04-05*

Příklad 2.12 - pád tělesa do studny

Student se na zámku Zbiroh se naklání nad studnu, přičemž mu do ní z náprsní kapsy košile vypadnep pětikoruna. Ihned zapne stopky na mobilním telefonu a změří, že žuchnutí mincedno uslyší za čas $t = 6.24\,\mathrm{s}$ po vypadnutı mince. Tíhové zrychlení je rovno $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, rychlost zvuku ve studni je $c = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Řešení:

Vztah mezi hloubkou studny h a dobou pádu t_1 (vezmeme-li za počáteční čas $t_0 = 0$, bude t_1 zároveň okamžik dopadu) plyne z obecného vzorce pro polohu rovnoměrně zrychleného pohybu, ze kterého po dosazení zadaných veličin snadno dostaneme

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2.$$

V čase t_1 vznikne zvuk žuchnutí, který se šíří rychlostí c ze dna studny ke studentovi, ke kterému dorazí v čase t_2. Vztah mezi uraženou délkou a časovým rozdílem plyne ze vztahu mezi dráhou a časem pro rovnoměrný pohyb, popřípadě pro průměrnou rychlost (náš případ je zvláštní případ téhož, kdy rychlost je navíc konstantní):

$$t_2 - t_1 = \frac{h}{c}.$$

Oba vztahy představují soustavu soustavu rovnic pro t_1 a h, přičemž t_1 zadání nepožaduje a h je výsledek. $t_2 = 6.24$ s je zadáno, pouze jsme si přeznačili, aby bylo zřejmé, že jde o bod na ose t. Neznámou t_1 ze soustavy vyloučíme vyjádřením ze druhého vztahu a dosazením do prvního, čímž dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou h:

$$h = \frac{1}{2} g \left(t_2 - \frac{h}{c} \right)^2.$$

Po úpravě na kvadraticku rovnici s rozepsanými členy seřazenými podle mocnin h dostaneme

$$h^2 - 2h \left(t_2 c + \frac{c^2}{g} \right) + \frac{1}{2} t_2^2 c^2 = 0.$$

Diskriminant kvadradické rovnice je

$$D = 4 \left(t_2^2 + \frac{c}{g} \right)^2 c^2 - 4 t_2^2 c^2,$$

po zjednodušení máme

$$D = \frac{4c^4}{g^2}\left(\frac{2t_2 g}{c} + 1\right).$$

Řešení získáme dosazením do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice, po zjednodušení máme

$$h_{1,2} = \frac{c^2}{g}\left(\frac{t_2 g}{c} + 1 \pm \sqrt{\frac{2t_2 g}{c} + 1}\right).$$

Po dosazení zadaných hodnot získáme jedno řešení $h_1 = 162.8\,\mathrm{m}$ a druhé řešení $h_2 = 27\,648\,\mathrm{m}$. Druhé řešení však nevyhovuje zadání. Zpětným výpočetem času dopadu t_1 z druhé rovnice výchozí soustavy rovnic totiž zjistíme, že tento čas vyjde záporný, -75 s. Interpretace je taková, že nejde o volný pád ale svislý vrh započatý v takovém čase a v takové hloubce, aby pohyb kulminoval v čase 0 přesně v místě, kde se nachází student, přičemž zvuk vyslaný na počátku svislého vrhu dorazí se zpožděním v čas, který je zadaný jako odměřený na stopkách od okamžiku začátku pádu.

Kromě záporného času a rozporu se zadáním proto, že zadaný byl volný pád, nikoliv svislý vrh, by takový pohyb musel začít v hloubce přes 27 km, kdy by již nemusela být dostatečně splněna podmínka homogenního gravitačního pole s konstantním zrychlením. Navíc takovou studnu nelze současně dostupnými technickými prostředky navrtat a na některých místech by její hloubka mohla překonat tloušťku zemské kůry.

Nenechte se zmást tím, že zvuk dorazí až za tělesem. Fyzikálně jde přesto o možné řešení. Část pohybu by totiž probíhala nadzvukovou rychlostí. To lze ověřit hrubým odhadem, rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu je lineární funkce času, zrychlení je g, vynásobením času 75 s gravitačním zrychlením získáme odhad počáteční rychlosti svislého vrhu blížící se 750 m/s.

Dopočítáme-li čas t_1 pro první řešení, dostaneme hodnotu 5.76 s. Ta již odpovídá očekávání.

Ověřte si správnost řešení na Wolgram Alpha, zapište do dotazovacího pole řádek "solve{h=(g t_1^2/2), t_2-t_1=h/c, h, t_1}" (pro přehlednost byly proměnné nazvány shodně s tímto textem) nebo použijte přímý odkaz.