Často kladené dotazy

V této části budou shromážděny dotazy studentů během semestru a zkouškového období. Každý dotaz má samostatnou stránku(y).

Seznam otázek:

1. Jaký je význam substancionální derivace v Eulerově pohybové rovnici?

Dovolte mi stručný dotaz k matematickému aparátu použitému v Eulerově hydrodynamické rovnici, jak nám ji formuloval pan doktor Koníček. Abyste nemusel složitě hledat, přikládám Vám data, se kterými pracuji.
Na obrázku Eulerova-rovnice-kapalina.png jsem zakroužkoval dva matematické výrazy, kterým nerozumím. Snažím se analýzu brát hodně rigorózně, takže mne některé symbolické zápisy s operátorem nabla pletou, zejména v kartézských souřadnicích. Jakou operaci se to snažím provést v tom druhém kroužku? Co je ten skalár v závorce, který připomíná divergenci s prohozeným pořadím členů (nejdříve je zde složka rychosti, teprve pak parciální derivace)?

Omlouvám se, že svůj dotaz pokládám tak nekonkrétně. Významu rovnice asi rozumím, ale nejsem schopen rozklíčovat, jakou operaci se tady snaží pan doktor provést. Opačné pořadí (tedy nabla . vektor) by byl skalár divergence vektoru. Rozumím, že ve fyzice se nám někdy hodí - řekněme - stručnější zápis. Jak to, že se zde při manipulaci s nablou očividně ignoruje kumutativita skalárního součinu, která je zavedená už v jeho definici?

Výraz $(\mathbf{v}\cdot\nabla)$ se vyskytuje v úplné derivaci podle času v případě, kdy sledujeme jako proměnnou nějakou jinou veličinu než souřadnice a tato veličina představuje prostorové a časové pole, obecně jak skalární, tak může být i vektorové.
U mechaniky hmotného bodu to není tento případ, máme sice silové pole ale to není neznámá pohybové rovnice, to je zadaná pravá strana rovnice. U kapalin je sledovanou proměnnou rychlost, která, na rozdíl od souřadnic v případě mechaniky hmotného bodu, tvoří časoprostorové vektorové pole. Pochopení pak trochu komplikuje fakt, že rychlost sama je derivací polohy. Z pedagogických důvodů Vám všechny potřebné vztahy ukážu nejprve na skalární veličině, čímž se vyjasní princip a až následně ji nahradím rychlostí jako zobecnění pro vektorovou veličinu.

Teplotní pole, je funkcí polohy a času $\vartheta_p(x, y, z, t)$, všechny argumenty jsou nezávislé.

$\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}$ udává, jak se v daném bodě mění teplota v čase.

$\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}$ udává, jak se v daném čase mění teplota ve směru osy x.

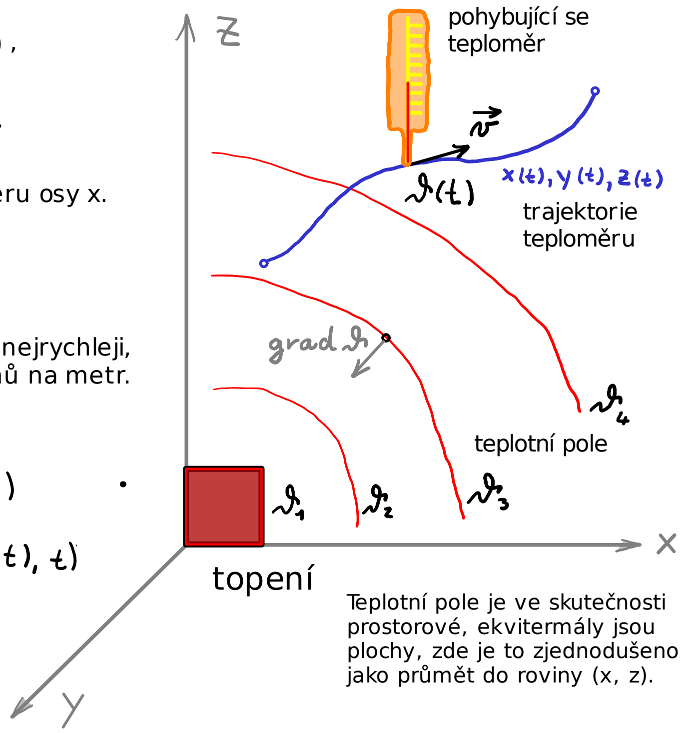
$$\text{grad}\,\vartheta = \vec{\nabla}\vartheta = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)$$

udává směr, ve kterém se teplota v daném místě mění nejrychleji, velikost gradientu udává, jak strmě, například kolik kelvinů na metr. Je kolmý na izotermickou plochu.

Trajektorie teploměru: $(x(t), y(t), z(t))$.

Teplota naměřená teploměrem: $\vartheta(x(t), y(t), z(t), t)$

Je funkcí času ale na její změnu v čase má vliv jak časová změna teplotního pole, tak změna polohy. Argumenty funkce nejsou nezávislé, souřadnice udávají polohu bodu na křivce v závislosti na čase.



Teplotní pole je ve skutečnosti prostorové, ekvitermály jsou plochy, zde je to zjednodušeno jako průmět do roviny (x, z).

Spočítejme změnu teploty v čase tak, jak ji "vidí" teploměr, tj. kdyby vysílal údaj o teplotě do velínu, neudával však svou polohu, jen změnu teploty. Matematicky to je úplná derivace. Fyzikálně vyjadřuje rychlost změny, na níž se podílejí všechny závislosti na čase prostřednictvím všech ostatních veličin, které také závisí na čase. Zde je to poloha, která je funkcí času.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \underbrace{(v_x, v_y, v_z)}_{\vec{v}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}\vartheta}$$

Výsledný vztah:

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vartheta}$$

Gradient je česky spád.

vliv pohybu na změnu teploty
vliv změny teplotního pole v čase na změnu teploty

Pozorování:

- Pokud je nulová rychlost, je změna údaje teploměru dána jen časovou změnou teplotního pole (člen s parciální derivací podle času).
- Pokud má rychlost směr izotermy, tj. je kolmá na gradient teploty, nemá změna polohy vliv na celkovou změnu teploty (skalární součin ve vzorci je nulový).

Člen vlivu pohybu na celkovou změnu teploty lze také interpretovat takto:

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vartheta = v\,\underbrace{\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}\vartheta}$$

$\vec{v} = \vec{\tau}\,v$

geometricky průmět gradientu do směru $\vec{\tau}$,
fyzikálně spád teploty (v K/m například) ve směru $\vec{\tau}$,
tedy podél trajektorie.

Pokud je to příliš teoretické a abstraktní, zkuste si toto cvičení:

Kolem chladnoucí pece nacházející se v počátku souřadnicové soustavy je teplotní pole určené funkcí

$$\vartheta(\vec{r},t) = 20\,^\circ\mathrm{C} + (200\,^\circ\mathrm{C})\, e^{-\frac{t}{300\,\mathrm{s}}}\, e^{-\frac{x^2+y^2+2z^2}{4\,\mathrm{m}^2}}\,.$$

Spočítejte:

a) Jaká bude teplote pece v čase 5 minut od začátku chladnutí.
b) Jak rychle bude klesat teplota pece v čase 5 minut od začátku chladnutí.
c) Jakým směrem bude mířit největší spád teploty v místě (1, 1, 1) m v čase 5 minut od začátku chladnutí a jaká bude jeho hodnota.
d) Jaký bude spád teploty v místě (1, 1, 1) m ve směru vektoru (1, 2, 2) v čase 5 minut od začátku chladnutí.
e) Jaký bude spád teploty v místě (1, 1, 1) m ve směru souřadnice x v čase 5 minut od začátku chladnutí.

Pokud se vyjasnila tato část, tak přistoupíme k dalšímu kroku a sice že pokud sledujeme proudící kapalinu, není sledovaná veličina vztažená k proudícímu elementu tekutiny tentokrát teplota ale rychlost $\vec{v}$ včetně směru.

Místo $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vartheta$ máme $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$, operátor musíme dát do závorky, protože záleží na pořadí, nejdřív musíme provést skalární součin a pak teprve derivujeme jednotlivé složky rychlosti. Interpretace je stejná jako u teploty, pokud teplotu nahradíte postupně jednotlivými složkami rychlosti. Výraz v závorce je operátor, který po zapůsobení na skalární nebo vektorovou veličinu udává rychlost změny té veličiny podél trajektorie pohybu. U té rychlosti jde navíc o vektor, operace dá úplnou informaci o změně, jak co se týče změny směru, tak velikosti. Přesvěčte se, že záleží na pořadí.

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}v_x,\ \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v_y,\ \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v_z)$$

formálně můžete vytknout operátor $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}$, který se ve všech složkách opakuje, nikoliv složky rychlosti. Skalární součin je tedy formální operace s gradientem ještě před provedením derivace.

Operátor $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$ se někdy nazývá substancionální derivace.

Komutativita $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}$:

Skalární součin s číselnými výrazy je komutativní. Avšak u operátorů platí konvence, že operátor působí zleva doprava. Proto skalární součiny s operátory komutativní nejsou. Pokud bychom členy prohodili, operátor by působil na druhý člen, protože by se po komutaci nacházel vpravo od gradientu a dostali bychom divergenci rychlosti, nikoliv operátor:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}}\cdot(v_x, v_y, v_z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{v}\,.$$

Pokud operátor prostorové části substancionální derivace působí na skalární veličinu, můžeme skalární součin prohodit. Avšak s derivovanou veličinou a je nutno použít závorku, aby bylo zřejmé, že operátor působí pouze na ní.
Bez závorky by šlo opět o divergenci, tentokrát ze součinu skalární veličiny a rychlosti.

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vartheta = (\vec{\nabla}\vartheta)\cdot\vec{v}\,.$$

Není to ale nic, co byste neznali. Jako operátor můžete vzít funkci (tentokrát nepůsobí na funkci ale na číslo), princip je ale týž, například

$$\underbrace{3\sin x}_{\substack{\text{nejlepší zápis, jednoznačný}\\ \text{a nevyžaduje závorky}}} = \underbrace{(\sin x)\cdot 3}_{\substack{\text{neobvyklé ale}\\ \text{formálně správně}}} = \underbrace{\sin(x)\cdot 3}_{\text{obvyklejší}} \overset{?}{=} \underbrace{\sin x\cdot 3}_{\text{nejednoznačné}}\,.$$

Dodatečná poznámka:

Autor dotazu spočítal příklad (poslal mi ho ofocený e-mailem) a ještě našel v textu dvě chyby, vzniklé kopírováním a přepisováním, za což mu děkuji a opravil jsem. Poděkování je také za to, že bez dotazu by text nevznikl. To by se ale týkalo budoucích čtenářů, ne mě.