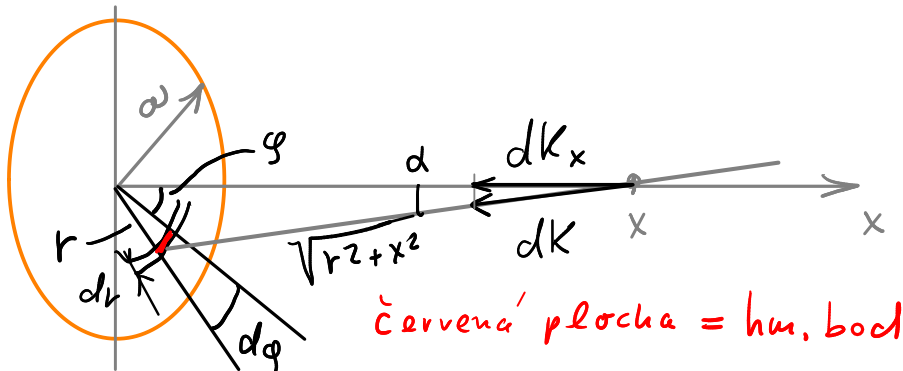


Konzultační webinář, 2020-05-11

Příklad 8. 7

Máme homogenní tenkou kruhovou desku o poloměru a a hmotnosti M . Vypočítejte

- a) potenciál gravitačního pole ve vzdálenosti $x > 0$ v ose desky,
- b) intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $x > 0$ v ose desky.



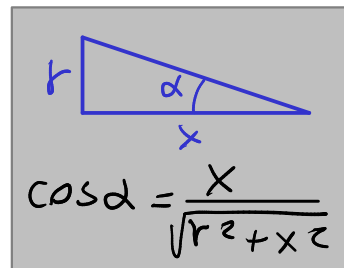
červená plocha = hm. bod

červená plocha představuje hmotný bod $dm = \sigma dS = \sigma dr \cdot r d\phi$

Intenzita gravitačního pole:

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}}{m} \quad dK = G \frac{dm}{r^2 + x^2} \quad dK_x = \cos \alpha dK$$

plošná hustota



$$K_x = \iint_{\text{plocha kruhu}} G \frac{\sigma r d\phi dr}{r^2 + x^2} \cos \alpha(r)$$

$r \in \langle 0, a \rangle$
 $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

substitution

$$\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2 + x^2}$$

$$dr = \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{r}{x} = \tan \alpha$$

$$r = x \tan \alpha$$

$$r \in \langle 0, a \rangle \rightarrow \alpha \in \langle 0, \arctan \frac{a}{x} \rangle$$

$$K_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{a}{x}} G \sigma x \tan \alpha \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha d\phi = 2\pi G \sigma \int_0^{\arctan \frac{a}{x}} \sin \alpha d\alpha$$

$\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$

$$= 2\pi G \sigma \left[-\cos \alpha \right]_0^{\arctan \frac{a}{x}} = 2\pi G \frac{M}{\pi a^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}} \right)$$

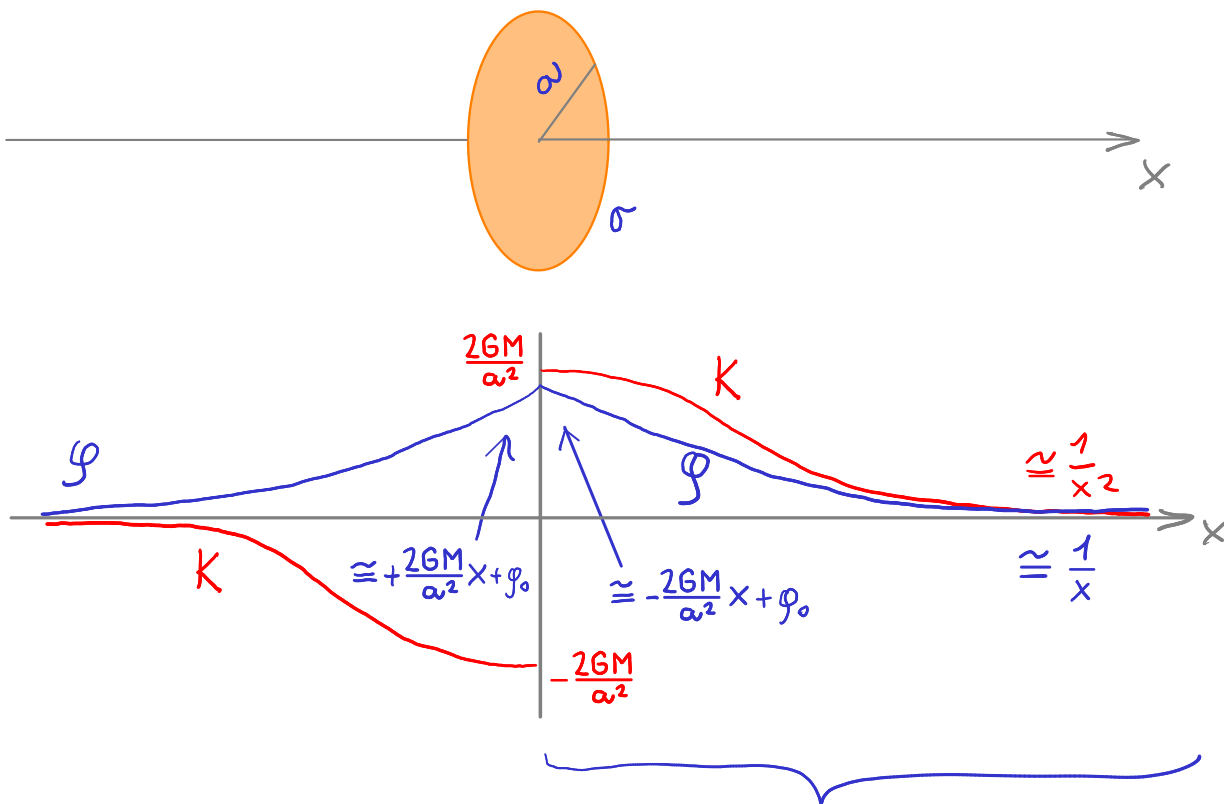
V učebním textu mají ve výsledku chybu, špatně uzavřenou závorku.

použili jsme $\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ x^2 + a^2 = u^2 \\ \cancel{2x} dx = \cancel{2u} du \end{array} \right| = \int \frac{u du}{u} = u + K = \sqrt{x^2 + a^2} + K$$

$$\underline{\underline{\varphi = - \int K dx = 2\pi \frac{GM}{a^2} (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \varphi_0}}$$

Příklad je obdobný příkladu 9.2 z elektrostatiky, formálně je výpočet stejný, protože Newtonův gravitační zákon má formálně stejný tvar jako Coulombův zákon. Podívejte se na příklad 9.2, jsou tam více rozebrány limitní případy, jak vypadají řešení když jsme velmi blízko kruhu a velmi daleko.



My počítali pouze toto, řešení v záporné části osy x dostaneme snadno ze symetrie, intenzita pole mění znaménko, potenciál nemění.

\approx ... asymptoticky se blíží