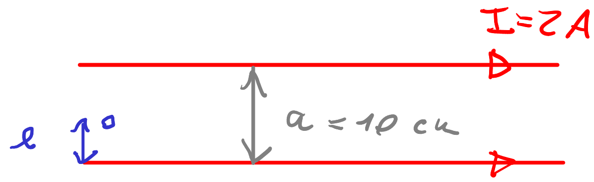
Elektrický proud, magnetické pole

Příklad 9. 17

Vypočítejte indukci magnetického pole buzeného dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe a = 10 cm, kterými teče proud I = 2 A stejným směrem, ve vzdálenosti 1 = 4 cm od prvního na společné kolmé spojnici obou vodičů. Vodiče jsou umístěny ve vakuu, permeabilita vakua je rovna $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-17}$ $H \cdot m^{-1}$.

zákon celového proudu



$$\oint_{\varphi} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{K} H dl = H \cdot 2\pi l = I$$

H = konst.

φ: kružnice o poloměru l

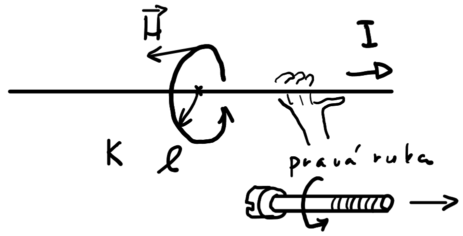
$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi l}}$$

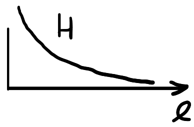
$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$ Gaussova věta

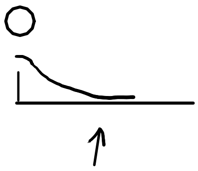
zdroje

$$\underbrace{\oint_{\varphi} \vec{H} \cdot d\vec{l}}_{\text{cirkulace vektoru}} = I$$ zákon celkového proudu

orientace H:

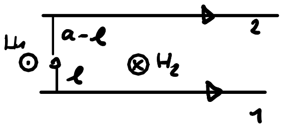






vodič s nenulovým průřezem

$$H = H_1 + H_2 = \frac{I}{2\pi l} - \frac{I}{2\pi(a-l)} = \underline{\underline{\frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{a-l}\right)}}$$



numericky:

$$H \doteq \frac{2A}{6.28}\left(\frac{1}{0.04} - \frac{1}{0.1-0.04}\right)\frac{1}{m} \doteq \frac{2}{6.28}(25 - 17) \doteq 3 A/m$$

$$B = \mu_0 H \doteq \underline{\underline{4 \cdot 10^{-6}\ T}}$$ T... tesla

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{H}{m}$

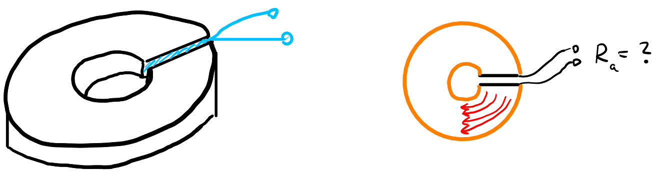
je to řádový odhad

Příklad 9. 19

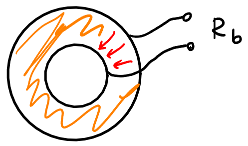
Z bronzové desky o tloušťce h=1 mm s rezistivitou ϱ =0,17 μΩ·m vyřežeme rovinný prstenec ve tvaru mezikruží s vnitřním poloměrem r_1 =10 cm a vnějším poloměrem r_2 =50 cm.
Jaký bude odpor tohoto prstence když:

a) prstenec radiálně rozřízneme a přívody budou okraje řezu,
b) přívody proudu budou obě ohraničující kružnice.

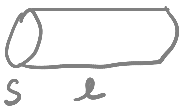
a)



b)



ϱ_R ... rezistivita



$$R = \varrho_R \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}$$

Ω $\quad \Omega m \quad \frac{1}{m}$

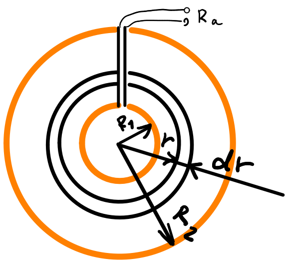
$$G = \sigma \frac{S}{l}$$

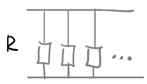
σ konduktivita

S/m siemens/metr

$G = \frac{1}{R}$ siemens = $\frac{1}{\text{ohm}}$

a)





$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots} \leftarrow \frac{1}{G} = \frac{1}{G_1+G_2+\dots}$$

$$G = G_1 + G_2 + \dots$$

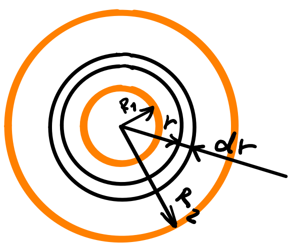
$$\frac{1}{R_a} = G = \int_{plocha} dG = \int_{R_1}^{R_2} \sigma \frac{h\,dr}{2\pi r} = \frac{\sigma h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma h}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$h\,dr = dS$$

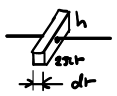
$$dG = \sigma \frac{dS}{l}$$

$$R = \frac{2\pi\varrho}{h}\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

b)



$$R = \int_{plocha} dR = \int_{R_1}^{R_2} \varrho \frac{dr}{2\pi r h} = \frac{\varrho}{2\pi h} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

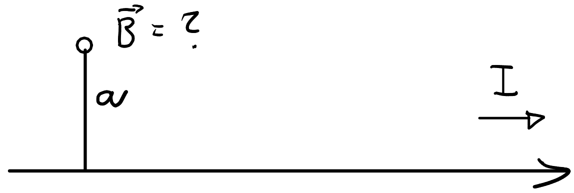


$S = 2\pi r h$

Příklad 9. 22

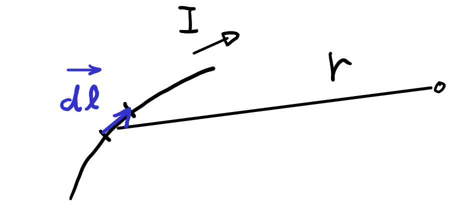
Vypočítejte magnetickou indukci nekonečně dlouhého přímého vodiče pomocí Biotova – Savartova zákona.

$$\vec{B} = \mu \frac{I}{4\pi r^2} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r}$$

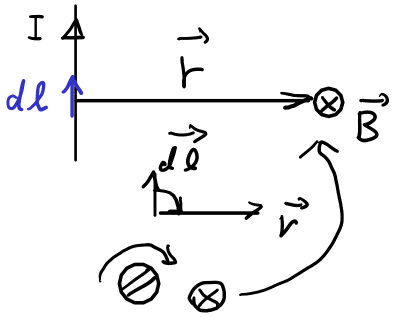


Biotův-savartův zákon,
ekvivalent Coulombova zákona
pro elektrostatické pole

Orientace B:

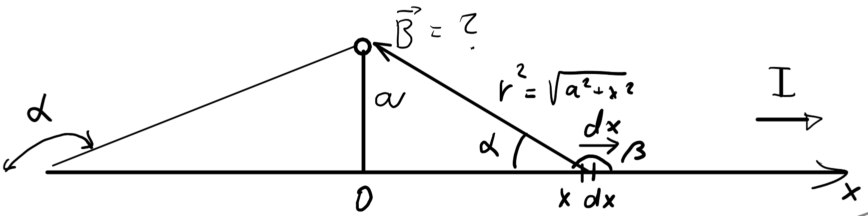


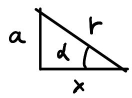
$$B = \mu \frac{I\,dl}{4\pi r^2}$$



orientace:

$$\vec{dl} \times \vec{r}$$





$$a = r \sin\alpha$$

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{a}{x} = tg\,\alpha$$

$$x = \frac{a}{tg\,\alpha}$$

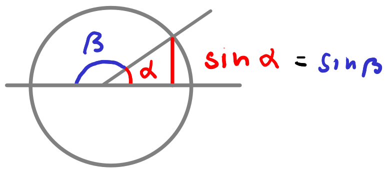
$$dx = a\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)' d\alpha = a\frac{\overbrace{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}^{=-1}}{\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

$$\underset{\uparrow\ \text{B.S. zákon}}{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|\vec{dx} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cancel{r} \sin\alpha\, dx}{r^{\cancel{3}\,2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\alpha\, \cancel{\sin^2\alpha}}{\underbrace{a^2}_{1/r^2}}\frac{-d\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha}}$$

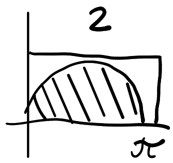
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\underbrace{\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})}_{\beta}$$

Všechna dB budou mít týž orientaci, tudíž stačí počítat jen velikost.

$$\sin\beta = \sin(\pi - \alpha) = \underbrace{\sin\pi}_{0}\cos(-\alpha) - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\sin(-\alpha) = \sin\alpha$$



$$B = -\int_{\pi}^{0} \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha}_{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}$$



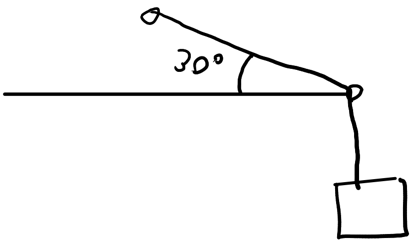
Dostáváme týž výsledek
jako ze zákona celkového
proudu (úloha 10. 17)
na jednom řádku,
bez integrace,
s podstatně menší námahou.

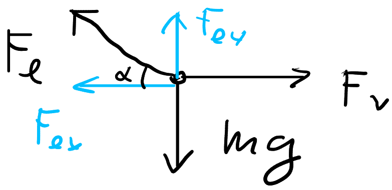
Tyto úlohy jsou na základě dotazů po webináři, již byly mimo záznam.

Příklad 5. 16

Závaží o hmotnosti m je zavěšeno na laně podepřeném vodorovnou vzpěrou. Pro úhel, který svírá vzpěra a lano, platí α = 30°. Hmotnost lana a vzpěry lze zanedbat. Vypočítejte

a) velikost tahové síly, kterou je napínáno lano nad h vzpěrou,
b) velikost tlakové síly, kterou je namáhána vzpěra,
c) velikost tahové síly, kterou je natahováno lano pod vzpěrou.





podmínka rovnováhy:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

směr x: $F_{ex} = F_v$

směr y: $mg = F_{ey}$

$$F_e \cos\alpha = F_v$$

$$mg = F_e \sin\alpha$$

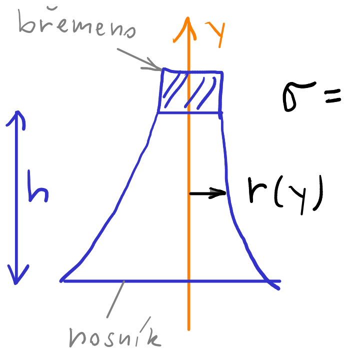
a) $F_e = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{mg}{0.5} = 2mg$

b) $F_v = F_e \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{2}mg = \sqrt{3}\,mg$

c) $F_g = mg$

Příklad 5. 25

Nosný pilíř z materiálu o hustotě ρ kruhového průřezu podepírá břemeno tíhy G.
Jaká musí být závislost poloměru pilíře r(y) na vzdálenosti od břemene, aby normálové napětí σ bylo po celé jeho délce konstatní?



$$\sigma = \frac{F}{S}: \quad \sigma(r) = \frac{mg + g\overbrace{\int_y^h \rho \pi r^2 dy}^{V}}{\pi r^2 h} = konst.$$

$$\pi r^2 \sigma = mg + \int_y \rho \pi r^2 dy \quad \Big/ \frac{d}{dy}$$

$$\pi \cdot 2r \frac{dr}{dy} \sigma = -\rho \pi \cancel{y}^2 r \qquad \text{ODR 1. řádu}$$

$$\int \pi \cdot 2r \underbrace{\frac{dr}{dy} \sigma dy}_{\frac{dr}{dy} dy = dr} = -\int \rho \pi y^2 dy$$

$$\cancel{2}\cancel{\pi} \frac{r^2}{\cancel{2}} \sigma = -\rho \cancel{\pi} \frac{y^3}{3} + K$$

$$r = \sqrt{-\frac{\rho}{\sigma}\frac{y^3}{3} + K}$$

napětí na vrcholu podstavce:

$$\sigma = \frac{G}{\pi r_0^2}, \quad G = mg$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{G}{\pi \sigma}}$$

$$y = h \quad r = r_0 \qquad r_0^2 = -\frac{\rho}{\sigma}\frac{h^3}{3} + K$$

$$K = r_0^2 + \frac{\rho}{\sigma}\frac{h^3}{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{\rho}{3\sigma}(h^3 - y^3) + r_0^2} = \sqrt{\frac{\rho}{3\sigma}(h^3 - y^3) + \frac{G}{\pi\sigma}}$$

Úloha nám vyšla odlišně od výsledku ve sbírce příkladů.

Na chybu jsem přišel, opraveno výše červeně a dopočítáno.

$$\pi \cdot 2r \frac{dr}{dy} \sigma = -\rho \pi r^2 \longrightarrow \frac{2\sigma}{r}\frac{dr}{dy} = -\rho \longrightarrow 2\sigma \int \frac{dr}{r} = -\int \rho dy$$

$$\ln r = -\frac{\rho}{2\sigma} y + \underbrace{K}_{\ln r_0} \longrightarrow r = r_0 e^{-\frac{\rho}{2\sigma} y}$$ (zde je ale r_0 jiné než výše)

$$\sigma = \frac{G}{\pi r^2(h)} = \frac{G}{\pi r_0^2 e^{-\frac{2\rho}{2\sigma} h}} \longrightarrow r_0 = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{\pi \sigma e^{-\frac{\rho}{2\sigma} h}}}, \quad r = \sqrt{\frac{G}{\pi\sigma}} \frac{e^{-\frac{\rho}{2\sigma} y}}{e^{-\frac{\rho}{2\sigma} h}} = \sqrt{\frac{G}{\pi\sigma}}\, e^{\frac{\rho}{2\sigma}(h-y)}$$

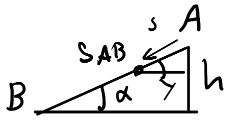
Pozn.: Na rozdíl od sbírky příkladů, my máme počátek souřadnice y na podložce, tudíž h - y je zde vzdálenost od břemena. Výsledky nám tedy souhlasí.

Příklad 5. 13

Z bodu A nakloněné roviny úhlu α se začne valit beze smyku homogenní válec.
Určete jeho rychlost v bodě B a čas proběhnutí dráhy s mezi body A a B.

zákon zachování energie:

$$E_c = E_k + E_p = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \underbrace{\frac{1}{2} J \omega^2}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}}}}_{\frac{3}{4} m v^2} + mgh$$



$s_A = 0$

$s_B = \overline{AB}$

$$s = s_A = \quad E_c = \frac{3}{4} m\, 0^2 + mg\, s_{AB} \sin\alpha$$

$$y = h - s \sin\alpha$$

$$mg \cancel{s_{AB}} \sin\alpha = \frac{3}{4} m v^2 + mg\,(\cancel{s_{AB}} - s) \sin\alpha$$

$$\cancel{m} g s \sin\alpha = \frac{3}{4} \cancel{m} v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g s \sin\alpha} \qquad v_B = \sqrt{\frac{4}{3} g\, s_{AB} \sin\alpha}$$

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{4}{3} g \sin\alpha}\; s^{\frac{1}{2}} \qquad \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

$$\int s^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\dot{s}\, dt}_{ds} = A \int dt$$

substituce $ds = \dot{s}\, dt$

$$\int s^{-\frac{1}{2}} ds = At$$

$$2 s^{\frac{1}{2}} = At + K \quad \rightarrow \quad \text{poč. podm.}$$

$t = 0 \quad s(t=0) = 0$

$K = 0$

$$s = \sqrt{\frac{A}{2} t + K_2}$$

$$t = \frac{2 s_{AB}^{\frac{1}{2}}}{A} = \cancel{2} \sqrt{\frac{s_{AB} \cdot 3}{\cancel{4} g \sin\alpha}}$$