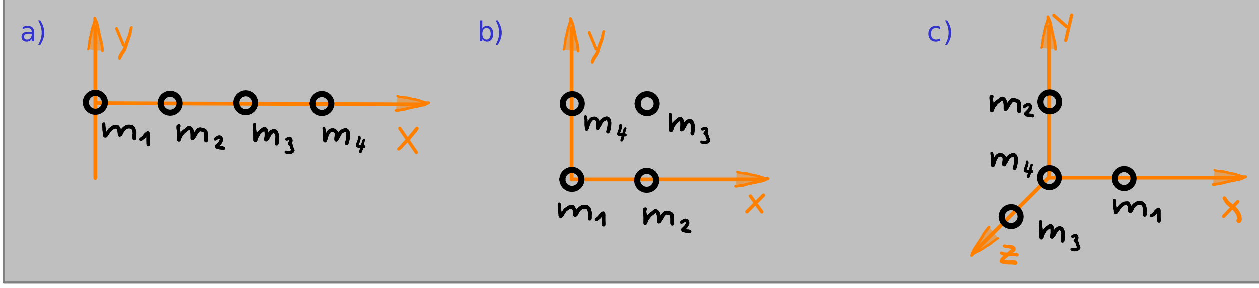
Mechanika tuhého tělesa

Příklad 5.1

Čtyři částice o hmotnostech m 1 = 1 g, m 2 = 2 g, m 3 = 3 g, m 4 = 4 g, jsou spojeny nehmotnými pevnými tyčkami délky a = 10 cm Určete polohu těžiště soustavy pro jednotlivá uspořádání.



$$\vec{r}_T = \underbrace{\frac{\sum \vec{r}_k m_k}{\sum m_k}}_{\text{vážený průměr}} = \underbrace{\frac{1}{m} \sum \vec{r}_k m_k}_{\text{zobecnění}} \qquad m_k \rightarrow \rho \, dV$$

Tuhé těleso:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \iiint\limits_V \vec{r} \underbrace{\rho \, dV}_{dm}$$

a) $$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{(1\cdot 0 + 2\cdot 10 + 3\cdot 20 + 4\cdot 30)\,\cancel{g}\cdot cm}{(1+2+3+4)\,\cancel{g}} = \frac{200}{10}\,cm = 20\,cm$$

b) $$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{(1\cdot 0 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10 + 4\cdot 0)\,\cancel{g}\cdot cm}{(1+2+3+4)\,\cancel{g}} = \frac{50}{10}\,cm = 5\,cm$$

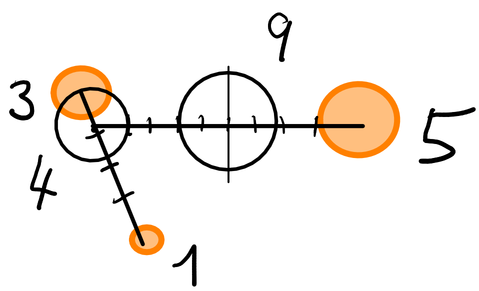
$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{(1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 10 + 4\cdot 10)\,\cancel{g}\cdot cm}{(1+2+3+4)\,\cancel{g}} = \frac{70}{10}\,cm = 7\,cm$$

c) $$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{(1\cdot 10 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 4\cdot 0)\,\cancel{g}\cdot cm}{(1+2+3+4)\,\cancel{g}} = \frac{10}{10}\,cm = 1\,cm$$

$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{(1\cdot 0 + 2\cdot 10 + 3\cdot 0 + 4\cdot 0)\,\cancel{g}\cdot cm}{(1+2+3+4)\,\cancel{g}} = \frac{20}{10}\,cm = 2\,cm$$

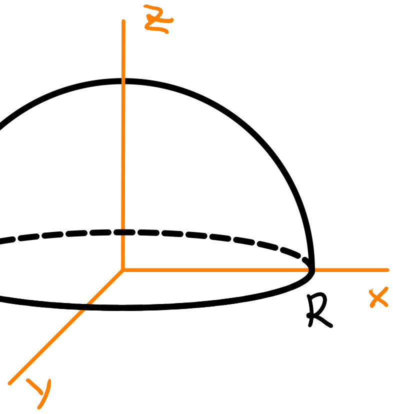
$$z_T = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{(1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 10 + 4\cdot 0)\,\cancel{g}\cdot cm}{(1+2+3+4)\,\cancel{g}} = \frac{30}{10}\,cm = 3\,cm$$

Lze také řešit graficky:



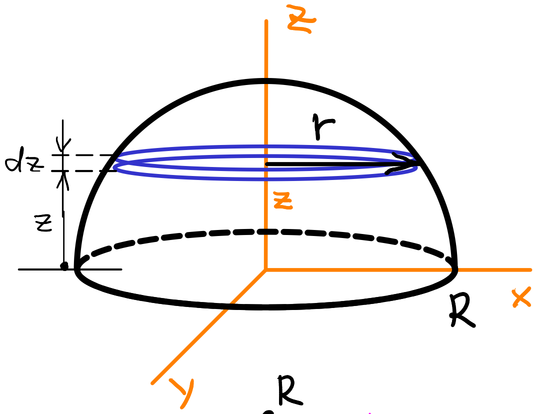
Příklad 5.2

Určete polohu těžiště homogenní polokoule poloměru R = 2 m.



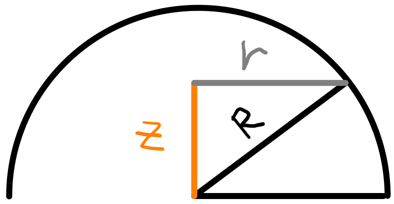
symetrie: $x_T = y_T = 0$

$$z_T = \frac{1}{m}\iiint_V z\,\rho\, dV$$



$$dV = \underbrace{\pi r^2}_{S}\, dz \qquad r = r(z)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{\cancel{4}\,2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}\,\frac{m}{\pi R^3}$$

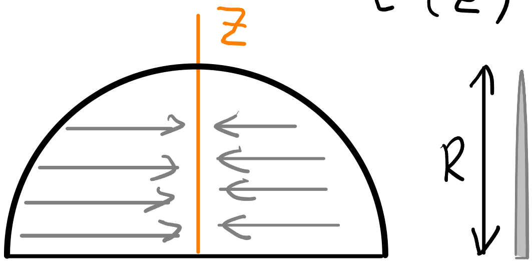


$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$z_T = \frac{1}{\cancel{m}}\int_0^R z\,\underbrace{\frac{3}{2}\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{\pi} R^3}\,\cancel{\pi}(R^2 - z^2)}_{\tau(z)}\,dz = \frac{3}{2R^3}\int_0^R z(R^2 - z^2)\,dz =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{R^3}\left[R^2\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{R^3}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = R\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{8}R}}$$



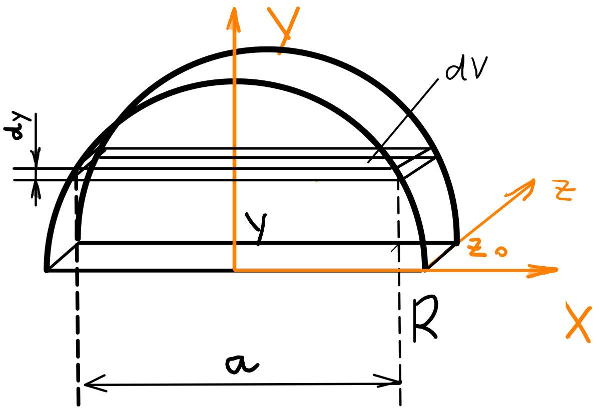
$\tau(z)$

Hmotu můžeme posouvat ve směru kolmém k ose z, aniž bychom tím měnili výšku těžiště. Můžeme tedy zadanou polokouli změnit na nehomogenní tyčku s délkovou hustotou hmoty τ(z). Úloha se tak redukuje na jednorozměrný případ.

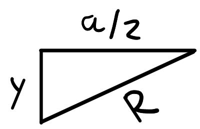
Příklad 5.5

Do jakého místa je nejlepší umístit nohu ke stolu s půlkruhovou homogenní deskou o poloměru R?

Hledáme polohu těžiště homogenního půlkruhu.



$$y_T = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho\, dV =$$



$$dV = a(y)\, z_0\, dy$$

$$a = 2\sqrt{R^2-y^2}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2 z_0}$$

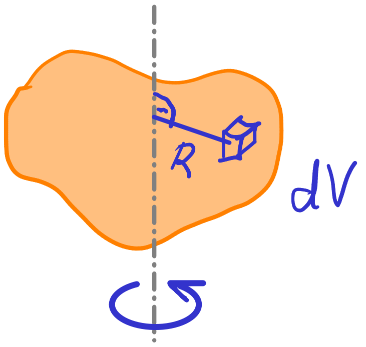
$$z_T = \frac{1}{\cancel{m}}\int_0^R y\,\frac{\cancel{m}}{\frac{1}{2}\pi R^2 \cancel{z_0}}\,2\sqrt{R^2-y^2}\,\cancel{z_0}\,dy = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,dy =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{substituce} \\ R^2-y^2 = u^2 \\ -2y\,dy = 2u\,du \\ u \in \langle R, 0\rangle \end{array}\right| = \frac{4}{\pi R^2}\int_R^0 \sqrt{u^2}\,\underbrace{(-u\,du)}_{y\,dy} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R u^2\,du =$$

$$= \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^R = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}R}}$$

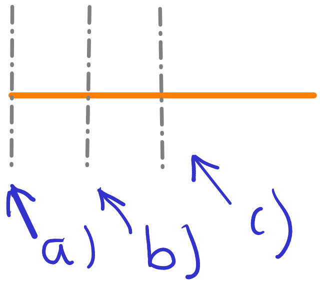
Příklad 5.7

Určete moment setrvačnosti tyčky délky l a hmotnosti m rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející
a) jejím koncem,
b) ve vzdálenosti l/4 od konce,
c) středem tyče.

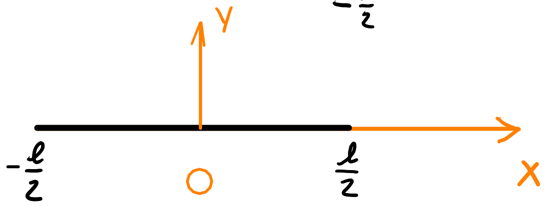


Pohybová rovnice: $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$

kde $J = \iiint R^2 \rho \, dV$



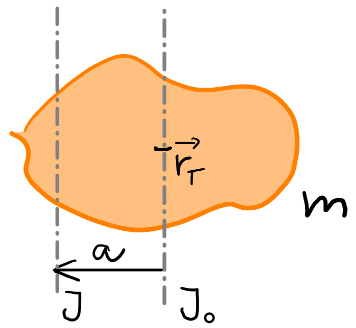
c) $J = \int dJ = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \tau \, dx = 2 \int_0^{l/2} x^2 \frac{m}{l} \, dx =$



$= 2\frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \cancel{2}\frac{m}{l}\frac{l^3}{3 \cdot \cancel{2^3}\,2^2} = \frac{1}{12} m l^2$

Steinerova věta:

$J = J_0 + ma^2$

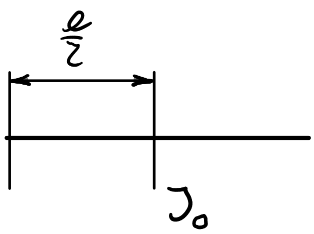


lim. případ:

$a \gg$ rozměry

$J = J_0 + ma^2 \rightarrow ma^2$

a)



$J_a = J_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2$

b) $J = J_0 + m \frac{l^2}{4^2} = m l^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) = \frac{m l^2}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{48} m l^2$