Elektrostatické pole - 2. část

Příklad 9.5

Vypočtěte kapacitu válcového kondenzátoru výšky h =20 cm s poloměry elektrod R_1 = 3 cm a R_2 = 4 cm.
Mezi elektrodami je vakuum, permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8.854\cdot10^{-12}$ F/m.

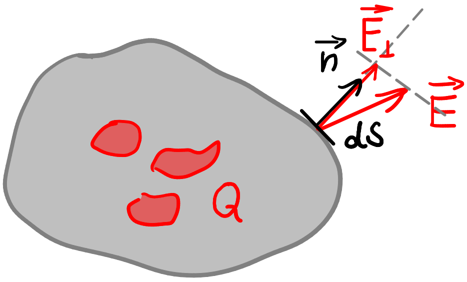
Gaussova věta:

$$\underbrace{\iint \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{\Psi} = Q$$

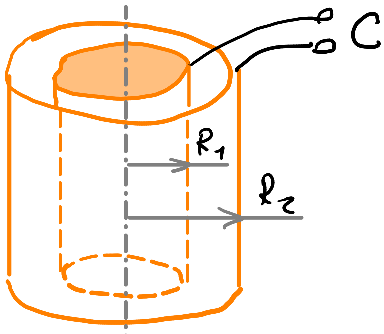
Ψ indukční tok

$$\Psi = Q$$

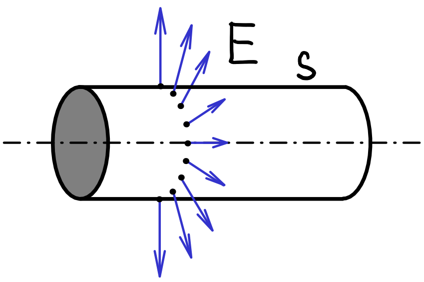
$$[\Psi] = \mathrm{C}$$



$$\left.\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{E}}_{E_\perp}\,dS\right\}$$ tok el. pole plochou dS



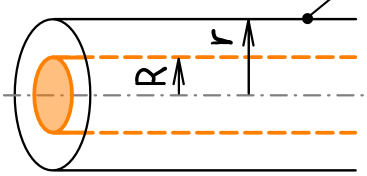
$C = ?$



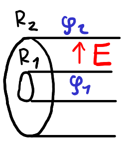
$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \underset{\uparrow}{=} \oiint_S E\,dS \underset{\uparrow}{=} E\oiint_S dS = ES \underset{\uparrow}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}\parallel\vec{n}$ — E = konst. (symetrie) — Gaussova věta

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\, 2\pi r h}$$

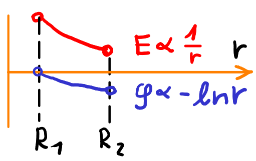


$$\varphi(r) = -\int_{R_1}^{r} E\,dr = -\int_{R_1}^{r}\frac{Q\,dr}{\varepsilon_0\cdot 2\pi r h} = \frac{Q}{\varepsilon_0\cdot 2\pi h}\,\underbrace{\ln\frac{R_1}{r}}_{\ln R_1 - \ln r}$$



Integrujeme od R_1, tudíž klademe $\varphi_1 = 0$, je však možno integrovat jako neurčitý integrál a pak dopočítat konstantu.

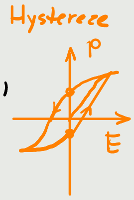
$$U = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1}} = \varepsilon_0\frac{2\pi h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$



Závislost P na E:

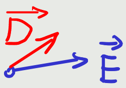
- Nejobecnější vztah:

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{t}\vec{K}(\vec{E}(\vec{r},t'))\,dt'$$



- Bez paměti: $\vec{P}(\vec{E})$
- Lineární dielektrikum:

$P \propto E \qquad \vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{\varkappa}_{\text{tenzor elektrické susceptibility}} \vec{E}$



- Lineární, izotropní dielektrikum:

$\vec{P} = \varepsilon_0\varkappa\vec{E}$ $\qquad \varkappa$ je číslo

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\varkappa\vec{E} = \varepsilon_0\underbrace{(1+\varkappa)}_{\varepsilon_r}\vec{E}$$

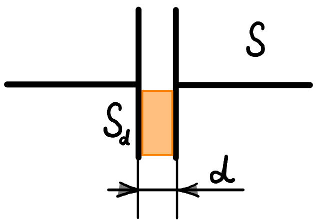
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ kde $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$

$\varkappa \in \langle 0,\infty)$, $\varepsilon_r \in \langle 1,\infty)$

- Vakuum: $\vec{P} = 0$

Příklad 9.7

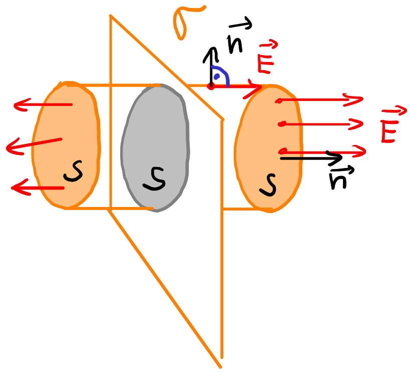
Deskový kondenzátor má elektrody plochy S, jejich vzájemná vzdálenost je d. Část plochy S_d mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem s relativní premitivitou εr.
Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?



$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

$\uparrow$ rovinný kondenzátor obecně

Níže je tento vzorec odvozen, kdo nechce vidět odvození, může přeskočit až na vlastní řešení (se vzorcem na 1 řádek).



Gaussova věta:

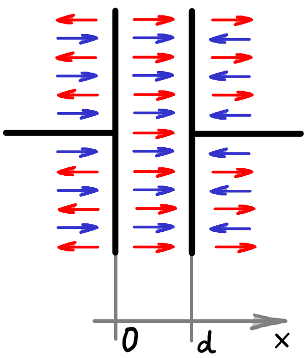
$\vec{E} \parallel \vec{n}$ $\qquad$ $E = \text{konst}$ (integrace po paralelní rovině)

$$\oiint_{\text{plocha}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\int_{\text{podstava}} E\,dS = 2ES = \underbrace{Q}_{S\sigma}\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{\text{plášť}} = 0$$

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Závěr: intenzita el. pole generovaného nabitou nekonečnou rovinou je konstantní.

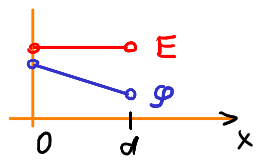


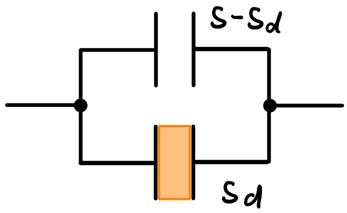
Pole uvnitř $E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\varphi(x) = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx = K - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

$$U = \varphi(0) - \varphi(d) = \cancel{K} - \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}0}_{=0} - \cancel{K} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\cancel{\sigma}\cdot S}{\frac{\cancel{\sigma}}{\varepsilon_0}d} = \varepsilon_0\frac{S}{d}$$

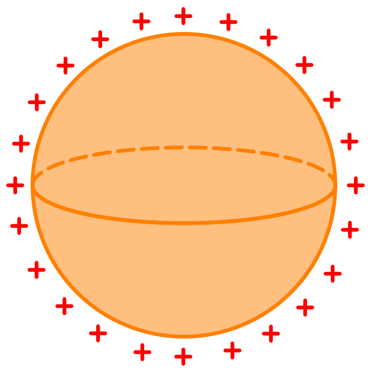


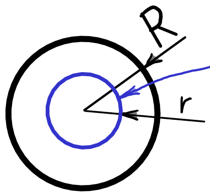


$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0\frac{S-S_d}{d} + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S_d}{d} = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0}{d}\left(S - S_d + \varepsilon_r S_d\right)}}$$

Příklad 9.11

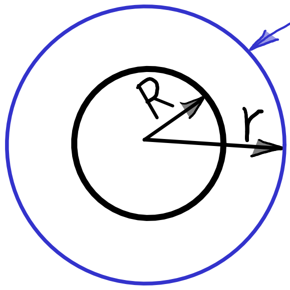
Vodivá koule o poloměru R je nabita nábojem Q.
Pro permitivitu koule i jejího okolí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$. Vypočítejte
a) intenzitu elektrického pole E_1 uvnitř koule,
b) intenzitu elektrického pole E_2 vně koule,
c) potenciál elektrického pole φ_2 vně koule,
d) potenciál elektrického pole φ_1 uvnitř koule.





integrační plocha uvnitř koule

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow \quad E = 0$$

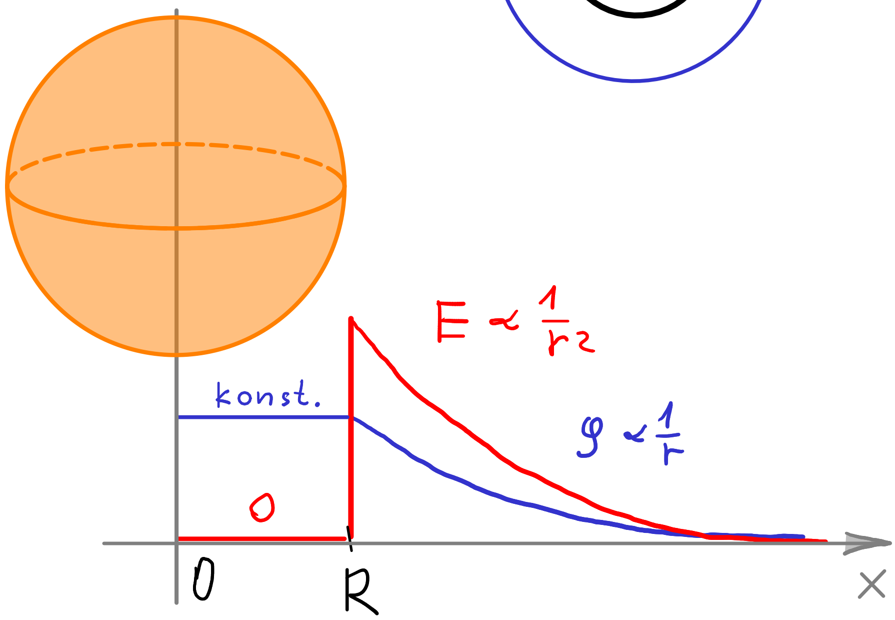


integrační plocha vně koule

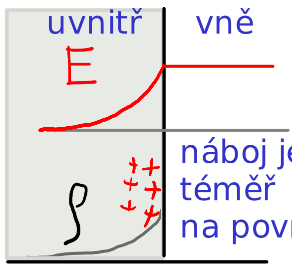
$$\underbrace{\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$



Poznámka k rozložení náboje:



Potenciál :

$$\varphi = -\int E\,dr = \begin{cases} \text{uvnitř} & -\int 0\,dr = K_1 \\ \text{vně} & -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_2 \end{cases}$$

Obvykle se volí referenční bod v ∞, tj $\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \Rightarrow K_2 = 0$

$$\lim_{r\to R^+}\varphi(r) = \lim_{r\to R^-}\varphi(r) \quad \text{spojitost potenciálu} \Rightarrow K_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Příklad 9.12

Vodní kapka vznikla spojením n = 6 stejných kapiček, z nichž každá měla (oproti nekonečnu) potenciál φ_1 = 1 kV. Jaký má potenciál φ_n (oproti nekonečnu) nově vzniklá kapka?

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_2 \qquad K_2 \text{ volíme } 0$$

$$\varphi_6 = \frac{6Q}{4\pi\varepsilon_0 r_6} = \frac{6Q}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0 \sqrt[3]{6}\, r}_{=\varphi_1}} = \frac{6}{\sqrt[3]{6}}\varphi_1 = \sqrt[3]{6^2}\,\varphi_1$$

$$6^{1-\frac{1}{3}}$$

$$V_6 = 6V_1 = 6\,\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_6^3$$

r_6

$$6\,\cancel{\frac{4}{3}}\,\cancel{\pi} r^3 = \cancel{\frac{4}{3}}\,\cancel{\pi} r_6^3$$

$$r_6 = \sqrt[3]{6}\, r$$