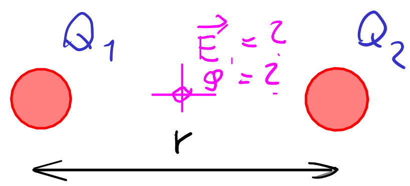
Elektrostatika

Příklad 9.1



$Q_1 = 50\,nC$ $\quad r = 20\,cm$

$Q_2 = 70\,nC$ $\quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,F/m$

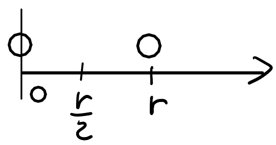
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}(Q_1 - Q_2) =$$

$\vec{D} \leftrightarrow Q$ přes Gaussovu větu



Q zdrojový, q zkušební

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{\cancel{q}}\frac{Q\cancel{q}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}(Q_1 - Q_2) = \frac{(50-70)\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 0.1^2} = \frac{-\cancel{2}\quad 10^{-9+1}}{\underbrace{12\cdot 8.85}_{\approx 100}\cdot\cancel{2}\cdot 0.1^2\cdot 10^{-12}}$$

$$= 1\cdot 10^{-9+1+12} = \underline{\underline{10^4\,\frac{V}{m}}}$$

Potenciál

$$\varphi = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int E(x)\,dx = -K\int \frac{dx}{x^2} = \dots$$

1-dim úloha

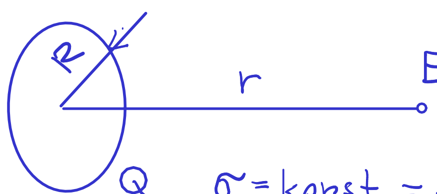
$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$$

$$\vec{r} = (x, 0, 0)$$

$$\varphi \propto \frac{1}{r}$$

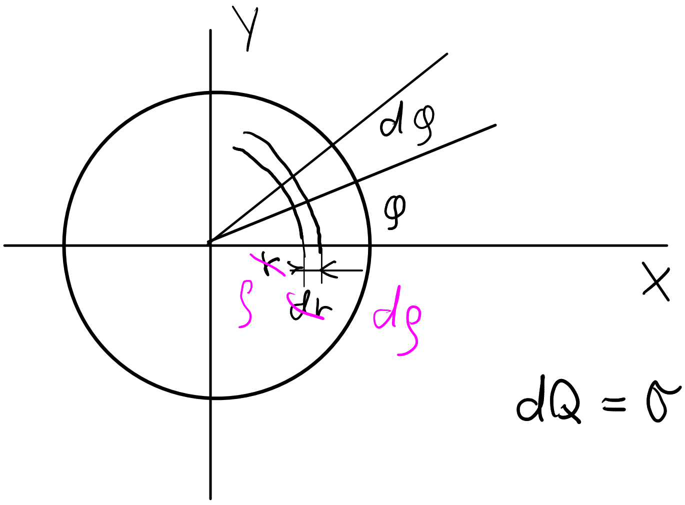
$\propto$ ... úměrné (proportional)

9.2

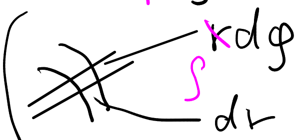


$E(r) = ?$ $\quad \varphi(r) = ?$

Q, $\sigma = \text{konst} = \frac{Q}{\pi R^2}$



$$ds = \cancel{r}\rho\, d\varphi\, d\cancel{r}\rho$$

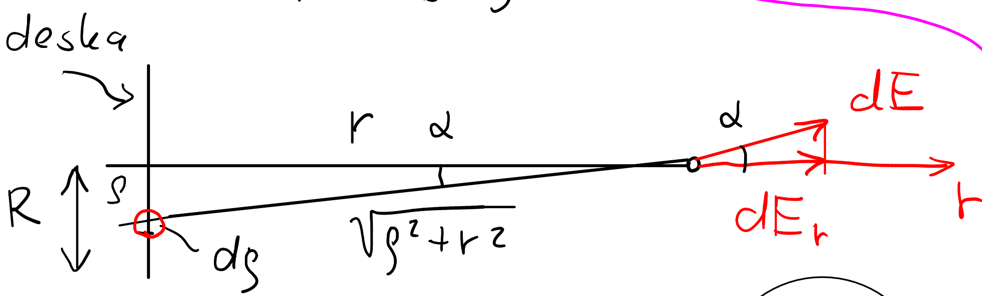


φ v radiánech

$$dQ = \sigma\, dS = \sigma\, \cancel{r}\rho\, d\varphi\, d\cancel{r}\rho$$

přeznačení na ρ kvůli kolizi

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dQ}{\rho^2+r^2} \qquad dE_r = dE\cos\alpha$$



$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{\rho^2+r^2}} \qquad \frac{1}{\rho^2+r^2} = \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{r^2}{\rho^2+r^2}}_{=\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{r^2}$$

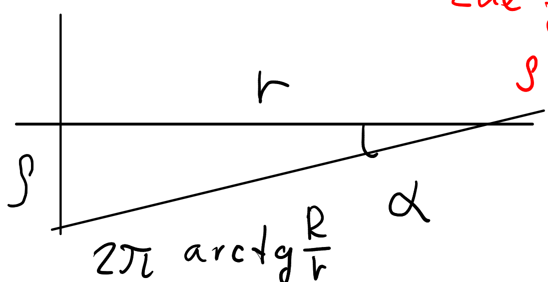
$$E_r = \iint\limits_{(kruh)} dE_r = \iint\limits_{(kruh)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\underbrace{\frac{\cos^2\alpha}{r^2}\cdot\cos\alpha\cdot\sigma\rho\, d\varphi\, d\rho}_{\text{nutno přepočítat } d\rho\to d\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \cancel{\cos^2\alpha}\cos\alpha\,\rho\, d\varphi\, \frac{d\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} =$$

zde jsem zapomněl ρ

$\rho = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$



$$\frac{\rho}{r} = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad d\rho = \frac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$\rho \in \langle 0, R\rangle \qquad \alpha \in \mathrm{arctg}\frac{R}{r}$

$$= K\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\mathrm{arctg}\frac{R}{r}} \underbrace{r\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\; r\, d\alpha}_{r\cancel{\cos\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}}\Big)\, d\varphi = K r\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\, \Big[\underbrace{\cancel{\sin\alpha}}_{-r\cos\alpha}\Big]_0^{\mathrm{arctg}\frac{R}{r}} =$$

$$\int \sin\alpha\, d\alpha = -\cos\alpha + C$$

$$= \frac{\sigma\, r^2}{\cancel{4\pi}\,\varepsilon_0 r^2}\,\cancel{2\pi}\left(\overset{-\cos}{\cancel{\sin}}\,\mathrm{arctg}\frac{R}{r} - \underbrace{\overset{+\cos 0}{\sin 0}}_{0}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)$$

$$\sin^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\beta+\cos^2\beta} = \frac{tg^2\beta}{tg^2\beta+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\beta}}$$

$$\sin \mathrm{artg}\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{1}{1+\underbrace{\left(tg^2\,\mathrm{arctg}\frac{R}{r}\right)^{-1}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

toto nepotřebujeme, potřebujeme sin → tg inv. funkce

Podobně

$$\cos \mathrm{arctg}\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{r}\right)^2}}$$

$$\cancel{E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 r^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}}}$$

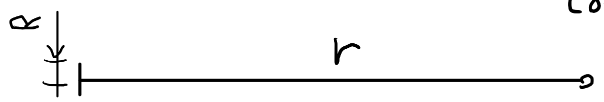
výsledná intenzita $E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)$

Limitní případy.

1. $\underline{r \gg R:}$ $\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}} \to \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}\right)} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}$

$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$, $E = \frac{\frac{Q}{\pi R^2}}{2\varepsilon_0}\left(1-1+\frac{R^2}{2r^2}\right) = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$ stejný vzorec jako Coulombův zákon

interpretace :



nabitý kruh se ve velké vzdálenosti jeví jako bodový náboj o velikosti $Q = \sigma\pi R^2$

2. $\underline{r \ll R:}$ $\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}} \cong \frac{r}{R} \to 0$, $\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

intenzita pole je v blízkosti nabité plochy (nejen našeho kruhu) <u>konstantní</u>.

Eletrostatický potenciál

$\varphi = -\int E \, dr$ Obecně je křivkový integrál, zde se redukuje na jednorozměrný.

$$\varphi = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\right) dr = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ r^2+R^2 = s^2 \\ \cancel{2} r\,dr = \cancel{2} s\,ds \end{array} \right| = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r - \underbrace{\int \frac{\cancel{s}\,ds}{\cancel{s}}}_{s+K}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+R^2} - r\right) + \varphi_0}.$$

Integrační konstantu jsme zapsali fyzikálně, jako potenciál.

<u>Poznámka:</u> Šlo by ukázat, podobně jako u E, že pro $r \ll R$ je potenciál $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r + \varphi_0$, což je potenciál konstantní intenzity el. pole, pro $r \gg R$ je potenciál $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \varphi_0$, což je potenciál bodového náboje $Q = \sigma\pi R^2$.

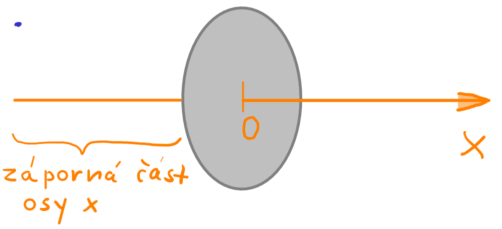
Zkuste si sami, použijte rozvoj $\sqrt{r^2+R^2} = r^2\sqrt{1+(R/r)^2} \cong$

$$\cong r^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$\cong$ ... asymptoticky se rovná.

V učebním textu mají výsledek ve zobecněném tvaru pro obě strany kruhu.

Výsledné vztahy jsou pro zápornou část osy stejné, pouze x (my ale značili r) mění znaménko.



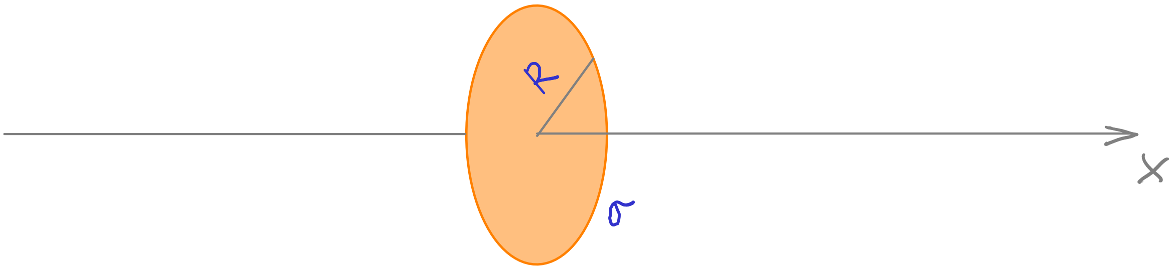
To lze zapsat v kompaktním tvaru pro obě strany najednou, pomocí funkce $\operatorname{sgn} x$ nebo $|x|$.

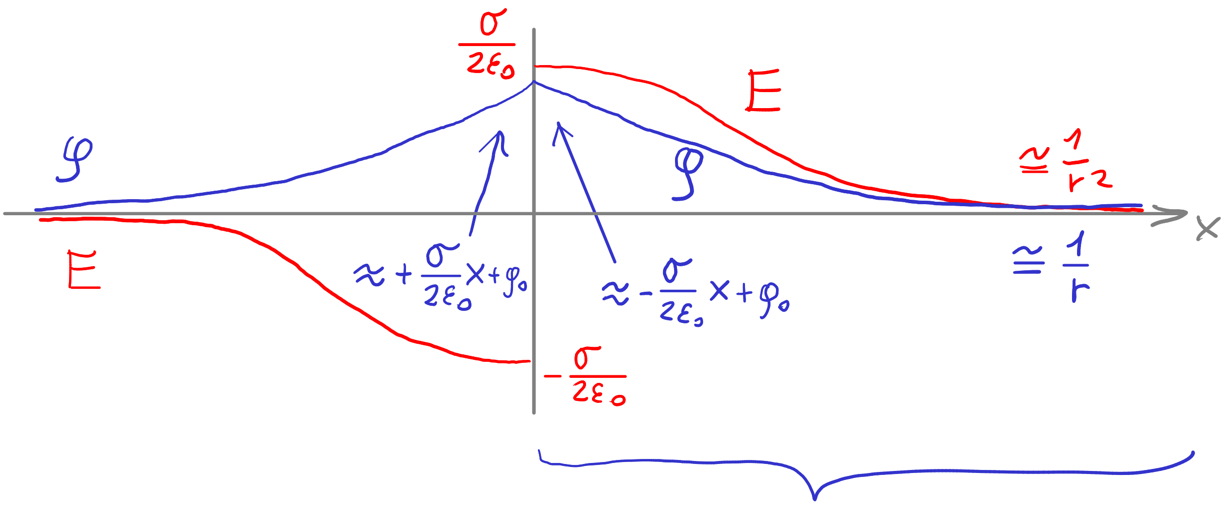
Je to i v souladu se vztahem $E = -\frac{d\varphi}{dx}$, neboť

$$\frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & x \neq 0 \\ \text{nedef.} & x = 0 \end{cases}$$

skutečně v tomto zobecněném případě není $E(x=0)$ definováno.

My měli jako jednostrannou limitu.





My počítali pouze toto,
s označením r místo x!