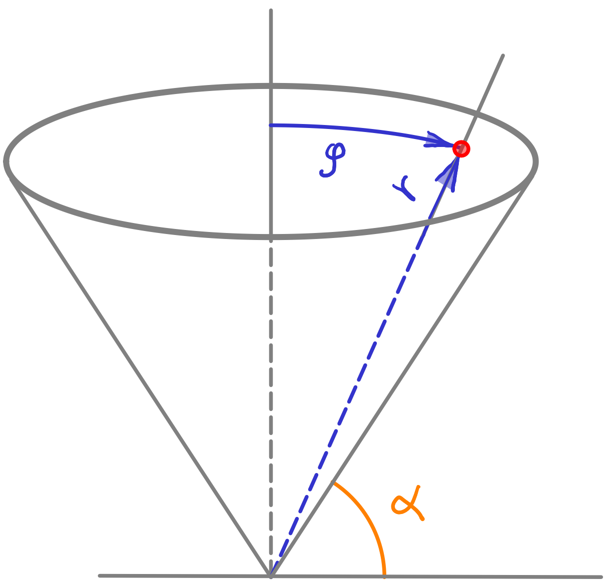
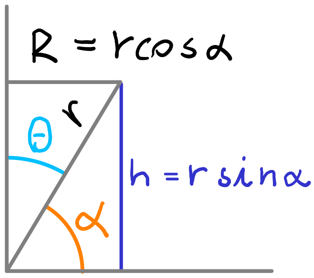
11. 4. (https://www.aldebaran.cz/studium/f1s.pdf)
Plocha kužele Zadání: sestavte pohybové rovnice hmotného bodu pohybujícího se bez tření v tíhovém poli po ploše kužele. Využijte Lagrangeův formalizmus.



$$T = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} m \left(v_\varphi^2 + v_r^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} m \underline{\left(r^2 \cos^2\alpha\, \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right)}$$

$$V = mg\, h(r,\varphi) = mg\, r \sin\alpha$$

Formálně se kvadrát rychlostí najde z transformačních rovnic:



$$\begin{cases} r(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{cases}\right\} v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(r^2 \cos^2\alpha\, \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) - mg\, r \sin\alpha$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \underbrace{- \frac{\partial L}{\partial q_k}}_{-F_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, n \qquad L(t, \underbrace{q_k, \dot{q}_k}_{\text{nezávisle proměnné}})$$

$$\frac{d}{dt}(p_1, p_2, \dots, p_n) - (F_1, F_2, \dots, F_n) = 0$$

spec. $n = 3$, $q_k = (x, y, z)$

Newtonův pohyb. zákon

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \cos^2\alpha\, \dot{\varphi}$$

$$r: \quad \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{m\ddot{r} - m r \cos^2\alpha\, \dot{\varphi}^2 + mg \sin\alpha = 0}$$

$$\varphi: \quad \frac{d}{dt}\left(m r^2 \cos^2\alpha\, \dot{\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{0} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{2 m r \cos\alpha\, \dot{\varphi} \cdot \dot{r} + m r^2 \cos^2\alpha\, \ddot{\varphi} = 0}$$

Cvičně si ukážeme i Hamiltonův formalismus, i když to po nás v zadání nepožadovali.

Hamiltonovy rovnice: Nejprve je nutno najít Hamiltonián.

$$E(t, q_k, \dot q_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L = m\dot r\cdot\dot r + m r^2\cos^2\alpha\,\dot\varphi\cdot\dot\varphi -$$

$$- \frac{1}{2} m\left(r^2\cos^2\alpha\,\dot\varphi^2 + \dot r^2\right) + mgr\sin\alpha = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}m\underbrace{r^2\cos^2\alpha\,\dot\varphi^2}_{v_\varphi^2} + mgr\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{p_r^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}\cancel{m}\,\cancel{r^2}\cancel{\cos^2\alpha}\,\frac{p_\varphi^2}{m^2\cancel{r^4}\cos^{\cancel{4}\,3}\alpha} + mgr\sin\alpha$$

$$r^2$$

substituce zob. hybností za všechny derivované souřadnice.

$$p_r = m\dot r \qquad p_\varphi = m r^2\cos^2\alpha\,\dot\varphi$$

$$\dot r = \frac{p_r}{m} \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m r^2\cos^2\alpha}$$

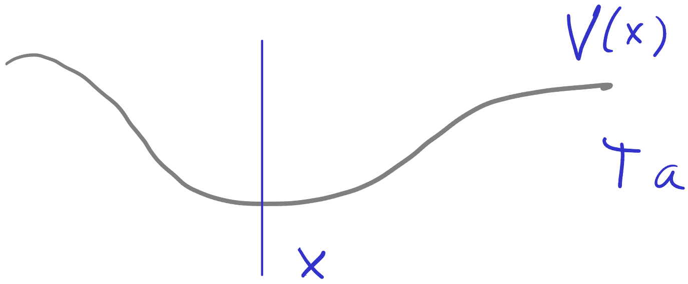
$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\cos^2\alpha}\right) + mgr\sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \dot r &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \dot\varphi &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ \dot p_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ \dot p_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\}$$

spočítá se derivováním, lze pak ukázat eliminací zob. hybností ze soustavy, že soustava je ekvivalentní soustavě Lagrangeových rovnic, kterých je polovina ale jsou druhého řádu.

Sem možná časem napíšu řešení.

Dotaz jak se počítá úhlová frekvence systému v minimu potenciální energie:



Taylorův rozvoj

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{1!}\underbrace{\frac{dV}{dx}(x_0)}_{0\ (\text{minimum})}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{d^2V}{dx^2}(x_0)}_{k}(x-x_0)^2 + \dots$$

LHO:

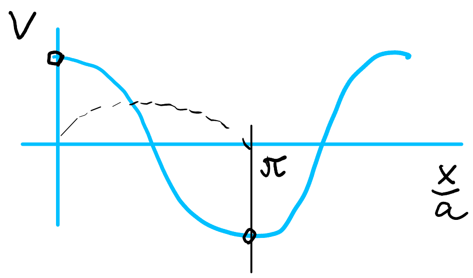
$$F = -k(x-x_0) \qquad V_{LHO} = -\int F\,dx = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + V_0$$

porovnáním

$$k = \frac{d^2V}{dx^2}(x_0)$$

Příklad (vymyšlený, teď zde na místě):

$V = V_0 \cos\frac{x}{a}$, najděte úhlovou frekvenci malých kmitů.



$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V_0}{a}\sin\frac{x}{a} = 0$$

minimum: $x = \pi a$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{V_0}{a^2}\cos\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) = -\frac{V_0}{a^2}\cos\pi = \frac{V_0}{a^2} = k$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{V_0}{a^2 m} \qquad \omega = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{V_0}{m}}$$