Elektrostatické pole

Příklad 14.1

Určete z Gaussovy věty elektrostatiky elektrické pole v okolí bodového náboje, dlouhého nabitého vlákna a nekonečné nabité roviny.

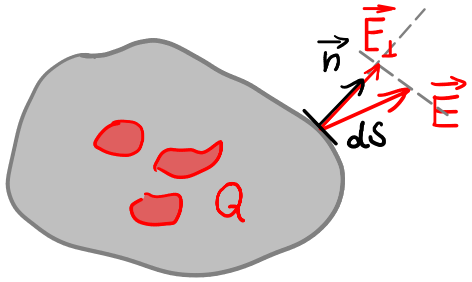
Gaussova věta:

$$\underbrace{\iint \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{\Psi} = Q$$

Ψ indukční tok

$$\Psi = Q$$

$$[\Psi] = C$$



$$\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{E}}_{E_\perp} dS$$ tok el. pole plochou dS

Největší výhodu přináší Gaussova věta v případě, kdy intenzita el. pole je na integrované ploše konstatní a kolmá na povrch. Pak ji lze z integrálu vyjmout a integrál je roven velikosti plochy.

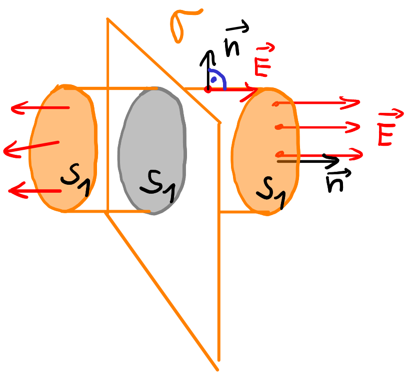
$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS = ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel \vec{n}$ E = konst. (symetrie) Gaussova věta

Koule: $S = 4\pi R^2$, $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}}$

Vlákno: $S = 2\pi R l$, $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\tau \cancel{l}}{2\pi\varepsilon_0 R \cancel{l}} = \underline{\underline{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}}}$

Rovina: $S = 2S_1$,



Gaussova věta:

$\vec{E} \parallel \vec{n}$ E = konst (integrace po paralelní rovině)

$$\underbrace{\oiint}_{plocha} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\underbrace{\int}_{podstava} E\,dS = 2ES_1 = \underbrace{Q}_{S_1\sigma}\frac{1}{\varepsilon_0}$$

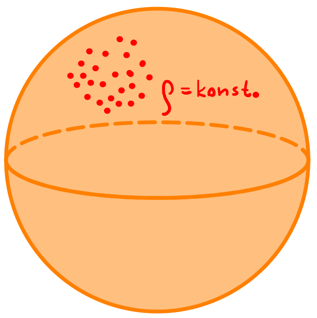
$$\iint_{plášť} = 0$$

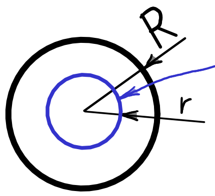
$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S_1} = \frac{\sigma \cancel{S_1}}{2\varepsilon_0 \cancel{S_1}} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}}$$

Závěr: intenzita el. pole generovaného nabitou nekonečnou rovinou je konstantní.

Příklad 14.2

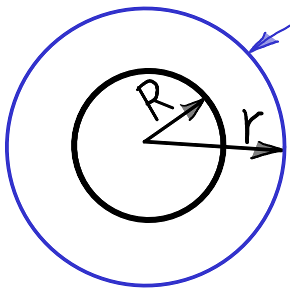
Určete elektrické pole generované koulí, která je homogenně nabitá, má poloměr R a náboj Q..





integrační plocha uvnitř koule

$$\underset{koule}{\iint} \vec{E}\cdot d\vec{S} \underset{\substack{\uparrow\\ E = konst.\\ \vec{E} \parallel \vec{n}}}{=} E\cdot 4\pi r^2 \underset{\substack{\uparrow\\ Gaussova\\ věta}}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

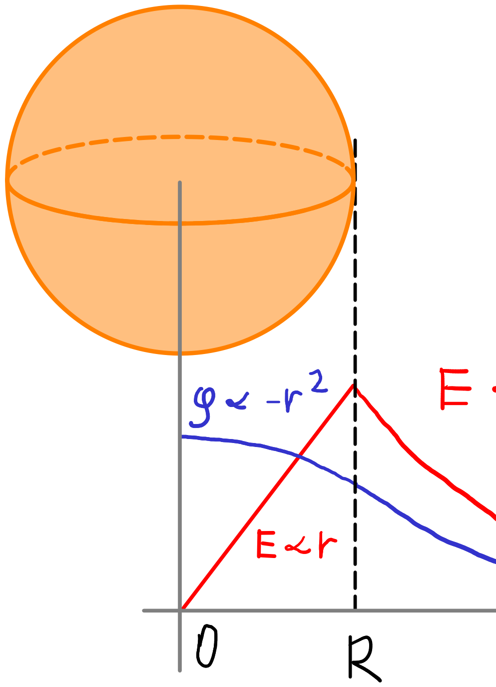
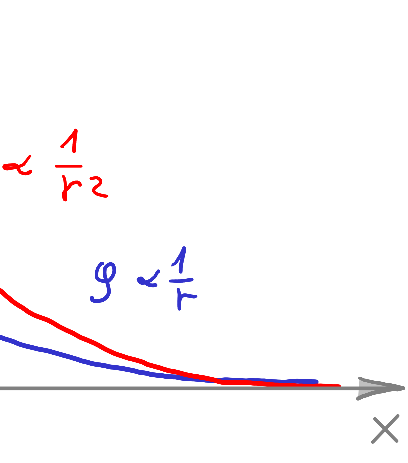


integrační plocha vně koule

$$\underbrace{\iint \vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

Potenciál :

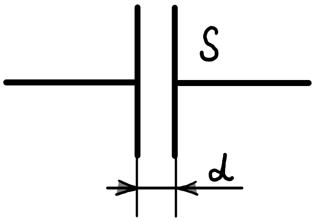
$$\varphi = -\int E\,dr = \begin{cases} \text{uvnitř} & -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + K_1 \\ \text{vně} & -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_2 \end{cases}$$

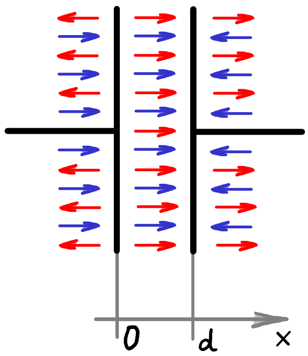
Obvykle se volí referenční bod v ∞, tj $\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \Rightarrow K_2 = 0$

$\lim_{r\to R^+} \varphi(r) = \lim_{r\to R^-} \varphi(r)$ spojitost potenciálu $\Rightarrow K_1$

Příklad 14.3

Určete kapacitu deskového kondenzátoru vyplněného dielektrikem o permitivitě ε. Předpokládejte, že desky jsou natolik veliké, že můžete zanedbat okrajové efekty.



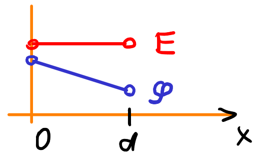


Pole uvnitř $E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\varphi(x) = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx = K - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

$$U = \varphi(0) - \varphi(d) = \cancel{K} - \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}0}_{=0} - \cancel{K} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\cancel{\sigma}\cdot S}{\frac{\cancel{\sigma}}{\varepsilon_0}d} = \underline{\underline{\varepsilon_0\frac{S}{d}}}$$

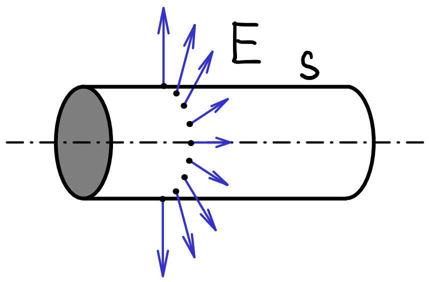


$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

rovinný kondenzátor
obecně

Příklad 14.4

Uvažujte válcový vodič o poloměru a obklopený souosou válcovou obálkou o poloměru b. Délka obou válců je L a předpokládejte, že L je mnohem větší než vzdálenost obou válců b – a, takže budete moci zanedbat okrajové jevy. Kondenzátor je nabitý tak, že vnitřní válec má náboj +Q a vnější obálka náboj – Q . Jaká je kapacita kondenzátoru?

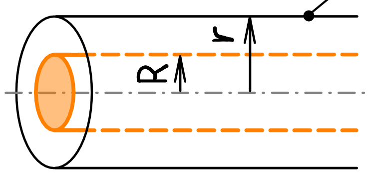


$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\,dS = E\oiint_S dS = ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel \vec{n}$

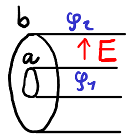
E = konst. (symetrie)

Gaussova věta



$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi r h}$$

$$\varphi(r) = -\int_a^r E\,dr = -\int_a^r \frac{Q\,dr}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi h}\underbrace{\ln\frac{a}{r}}_{\ln a - \ln r}$$



Integrujeme od a, tudíž klademe φ(a) = 0, je však možno integrovat jako neurčitý integrál a pak dopočítat konstantu.

$$U = \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{b}{a}} = \varepsilon_0 \frac{2\pi h}{\ln\frac{b}{a}}$$