Analytická mechanika

Příklad 11.1
Ukažte, že v konzervativním poli s potenciální energií V(x, y, z) vedou Lagrangeovy rovnice pro hmotný bod v kartézské souřadnicové soustavě na Newtonovy rovnice.

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \quad \xrightarrow{\text{integrací}} \quad \Delta\vec{p} = \underbrace{\int \vec{F}\,dt}_{\text{impuls síly}}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\dot{p}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{-F} = 0 \qquad k \text{ rovnic}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$(m\vec{v})^{\cdot} = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k \dots} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{F_k} = 0$$

p_k … zobecněná hybnost

$$F_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k}$$

nebo vektorově

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} V = -\vec{\nabla} V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad L = T - V \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = V(x, y, z)$$

$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z$:

$$x: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

podobně pro y, z

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \cancel{2}\dot{x}\right)}_{\underbrace{m v_x}_{p_x}} - \underbrace{\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)}_{F_x} = 0$$

podobně pro souřadnice y a z

$$\dot{p}_x = F_x$$

podobně pro souřadnice y a z

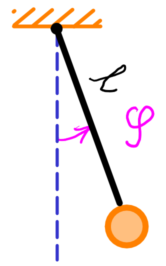
$$\longrightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

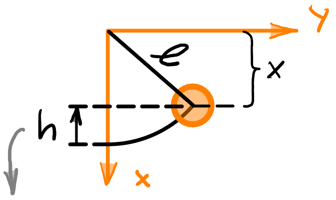
m = konst.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Příklad 11.2
Nalezněte pohybové rovnice kyvadla zavěšeného na nehmotném závěsu v Lagrangeově i v Hamiltonově formalizmu.





l délka závěsu (konst.)

$v_\varphi \quad v_r = 0$

$\varphi = q_1 = q$

$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) =$ uhodneme (určíme) $v = l\dot{\varphi}$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2$

$x = l\cos\varphi \rightarrow \dot{x}$

$y = l\sin\varphi \rightarrow \dot{y}$

$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$

$V = mgl(1-\cos\varphi)$

$E_p = mgh$

$h = l - x = l - l\cos\varphi$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{dL}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) + mgl(-(-\sin\varphi))$$

$$\cancel{m}l^2\ddot{\varphi} + \cancel{m}gl\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

translace	rotace
s	$\varphi \quad \varphi = \frac{s}{R}$
$v = \dot{s}$	$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}$
$a = \dot{v} = \ddot{s}$	$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \dots \frac{a_\tau}{R}$
F	M
m	J
$p = mv$	$b = J\omega$
$T = \frac{1}{2}mv^2$	$T = \frac{1}{2}J\omega^2$

linearizace

$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi}{3!} + \frac{\varphi}{5!} - \dots \approx \varphi$

$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} = 0$ dostaneme pohybovou rovnici stejnou jako pro LHO

$H = T + V$ v souřadnicích $q_k \; p_k$ kde $p_k = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$

$H = E(q_k, p_k, t)$

$E = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k - L$

Jak najít $H(q_k, p_k)$

1. zobecněné hybnosti $p_k = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$
2. zobecněná energie $E(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k - L$
3. $\dot{q}_k$ vyjádřit z 1. a dosadit do E, $H(q_k, p_k, t) = E(q_k, \dot{q}_k, t)$

$p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$

$E = p_k q_k - L$

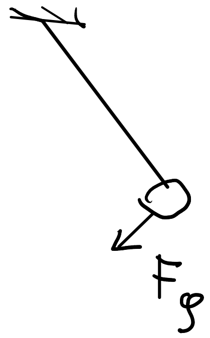
$$= ml^2\dot{\varphi}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \underbrace{mgl(1-\cos\varphi)}_{mgh} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2} + mgl(1-\cos\varphi)}_{H(\varphi, p_\varphi)}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}\right\} \quad 2n \text{ ODR 1. řádu}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m l^2}$$

$$\dot{p}_\varphi = -mgl\sin\varphi$$



$$\frac{d}{dt} p_\varphi = l F_\varphi$$

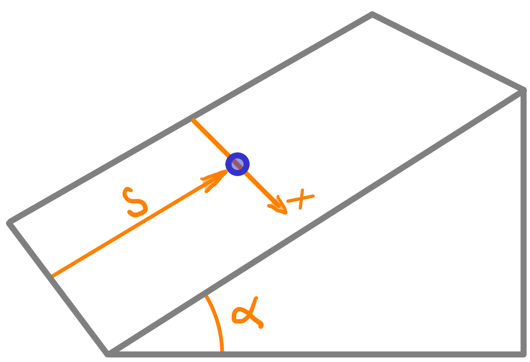
$$m l^{\cancel{2}} \ddot{\varphi} = \cancel{l} F_\varphi$$

$$\underbrace{m l \ddot{\varphi}}_{a} = F_\varphi$$

Všimněte si, že zobecněná hybnost zde má jiný rozměr než hybnost, je odvozena z úhlu a má význam momentu hybnosti.
Kdo sledoval webinář, všiml si, že to na konci zmátlo i mě, z Langrangeovy rovnice totiž dostanete rovnici dynamickou rovnici pro moment hybnosti, rovnici pro hybnost, což je ekvivalent Newtonovy pohybové rovnice, dostanete až po vykrácení l na obou stranách rovnice.

Příklad 11.3
Nalezněte pohybové rovnice tělesa klouzajícího bez tření po nakloněné rovině v Lagrangeově formalizmu.

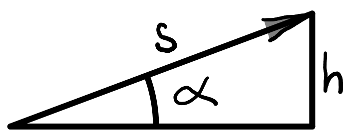
$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + \dot{x}^2\right) - mgs\sin\alpha$$



$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \qquad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} p_s - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt} p_x - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$



$$m\ddot{s} + mg\sin\alpha = 0$$

$$m\ddot{x} = 0$$

$$E_p = mgh = mgs\sin\alpha$$