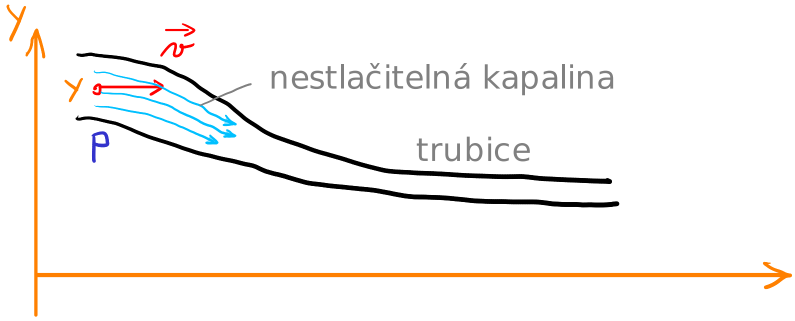
Bernoulliho rovnice



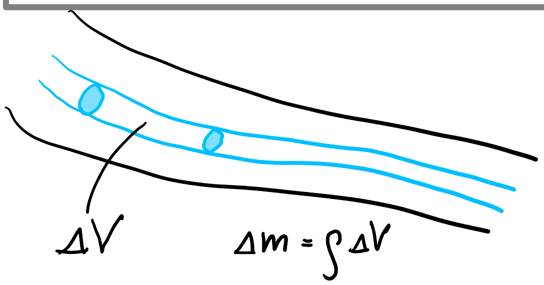
$$\underbrace{\vec{v}, p, y}_{\text{proměnné veličiny}}$$

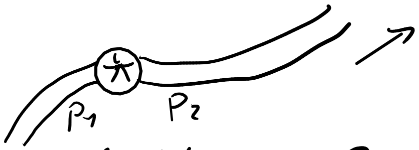
$$\underbrace{\rho, g}_{\text{konstantní parametry}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y + p = konst} \quad \Big/ \Delta V$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{\rho \Delta V}_{\Delta m} v^2}_{E_k} + \underbrace{\underbrace{\rho \Delta V}_{\Delta m} y}_{E_p} + \underbrace{p\Delta V}_{\text{tlaková energie}} = konst$$

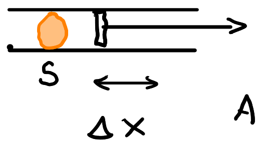
E_k: $\frac{1}{2}mv^2$ E_p: mgy tlaková energie



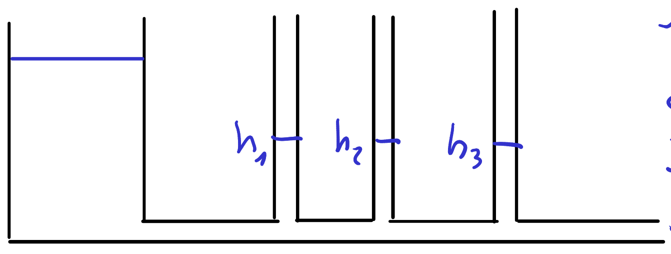


$$A = V \cdot \Delta p \qquad P = \frac{dV}{dt}\Delta p = Q\Delta p$$

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa = \frac{J}{m^3}$$



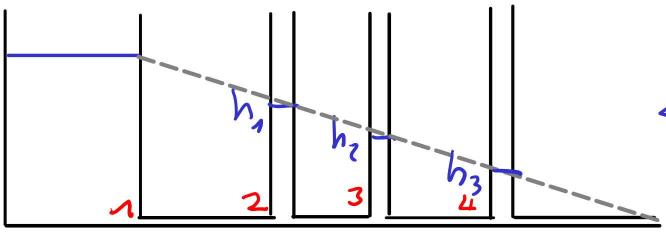
$$A = F\Delta x = p S \Delta x = p\Delta V$$



1. stejné
2. snižovat
3. stejné, nižší

podle Bernoulliho r. $h_1 = h_2 = h_3$

zde B.r. neplatí

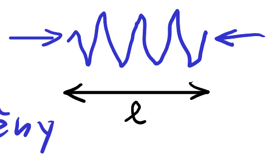


$v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$

B.R. → $p_1 = p_2 = p_3 = p_3$

Předpoklady

1. $\rho = \text{konst}$



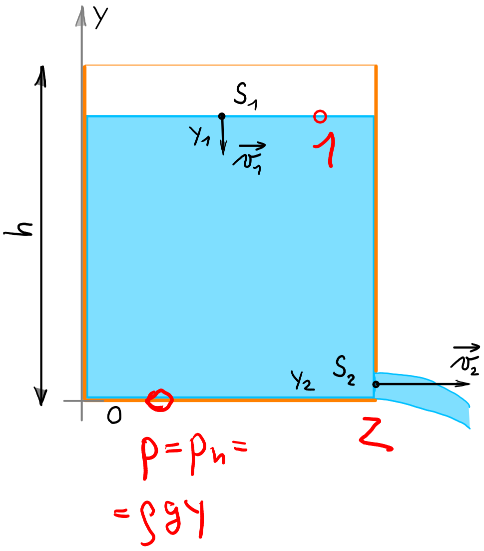
2. žádné tření o stěny
3. žádná viskozita
4. Laminární proudění

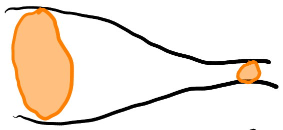
Příklad 13.1

Zadání: Válcový sud má průměr 80 cm a výšku 150 cm. Jak dlouho bude voda vytékat otvorem o ploše 2 cm 2 ? Sud je naplněný až po okraj.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 + p_2$$

y_1: y; p_1: p_a; v_2: neznámá; y_2: 0; p_2: p_a $\underbrace{}_{\text{vně otvoru}}$





Nestlačitelnost

$$Q_1 = Q_2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \longrightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y + \cancel{p_a} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2} + \cancel{p_a} \quad / \cdot 2$$

$$\cancel{\rho} v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) - \cancel{\rho} g y = 0 \qquad v_1 = \frac{dy}{dt}$$

$$\dot{y}^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) - g y = 0$$

$$\dot{y}^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) = g y \quad / \sqrt{}$$

$$\dot{y}\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1} = \sqrt{g y} \rightarrow \int \frac{\dot{y}}{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1}\, dt = \int \sqrt{g}\, dt$$

substituce $\quad \dot{y}\,dt = dy$

$$\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \sqrt{g} \int dt \leftarrow \frac{dy}{dt}\sqrt{\dots} = \sqrt{g y}$$

$$\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1} \cdot 2\sqrt{y} = \sqrt{g}(t + t_1) \quad \text{Obecné řešení}$$

zadáno:

$t = 0 \quad y = h$ odsud získáme t_1

$t = t_1 \quad y = 0$ toto platí

$$\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2}-1}\cdot 2\sqrt{h} = \sqrt{g}\,t_1 \qquad t_1 = 2\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}-1\right)\frac{h}{g}} =$$

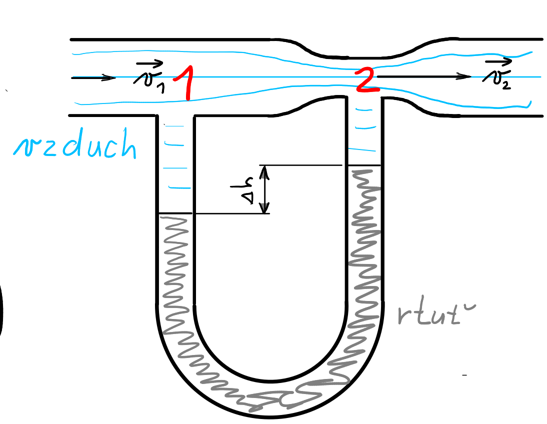
$$= 2\sqrt{\left(\left(\frac{(\cancel{80}^{10}\,\mathrm{cm})^2\pi}{\cancel{4}\cdot \cancel{2}\,\mathrm{cm}^2}\right)^2-1\right)\frac{0.15}{9}} = \sqrt{(100^2\pi^2-1)\,\frac{1}{6}} =$$

$$= \sqrt{\cancel{999}^{10^5}\,\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{333}{2}} \approx 12\,\mathrm{s}$$

Numericky nám vyšlo jinak než
v učebním textu, můžete zkusit
zatím najít chybu vlastními silami,
časem opravím i zde. Obecný výsledek máme správně, tudíž chyba je jen
v numerickém výpočtu.

Příklad 13.2
Zadání: Do Venturiho trubice vstupuje vzduch o hustotě 1,3 kg/m 3 . Trubice se zužuje z průměru 2 cm na průměr 1 cm. Spojovací trubička je naplněna rtutí o hustotě 13 600 kg/m 3 . Rozdíl výšek rtuti je 1,6 cm. Jakou rychlost má vtékající vzduch?

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g y_1} + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g y_2} + p_2$$



$$p_2 - p_1 = \rho_r g\,\Delta h$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho_r g\,\Delta h = \frac{1}{2}\rho v_1^2\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$\rho v_1^2\left(1-\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) + 2\rho_r g\,\Delta h = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2g\,\Delta h}{\frac{S_1^2}{S_2^2}-1}\,\frac{\rho_r}{\rho}}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 0.016\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\mathrm{m}}{\underbrace{2^4-1}_{\approx 16}}\ \underbrace{\frac{13600}{1.3}}_{10^{+4}}} \approx 1.4\cdot 10^{\frac{-2+4}{2}} \approx 14\,\mathrm{m/s}$$

Příklad 13.3

Určete rychlost proudění kapaliny v Pitotově trubici, je-li rozdíl výšek obou měřicích stanovišť 20 cm?

K tomuto příkladu jsme se nedostali,
zkuste si však sami.
Je snazší než oba předchozí příklady,
neboť je menší počet proměnných,
rychlost v bodě 1 je totiž nulová a odpadá
rovnice kontinuity.
Dostaneme tak o jednu proměnnou
a o jednu rovnici ve výsledné soustavě méně.