

## Časový rozvoj LD rovnice do řady - Newton-like

Klasická Minkowského čtyřsila je zástupným čtyřvektorem výrazu

$$m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} =: K^\mu = (K^0, \mathbf{f})$$

kde  $U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$  je čtyřrychlost (derivace trajektorie podle vlastního času částice). Pro Lorentzovu sílu je z principu relativity prostorová část tohoto zástupného čtyřvektoru rovna (pro konstantní pole)

$$\mathbf{f}_L(\tau) = \gamma(\tau)q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}(\tau)}{\gamma(\tau)} \times \mathbf{B} \right) \quad (1)$$

Podle článku z roku 2013 (Bizet, de Oca) lze konvergující řešení LD rovnice vyjádřit ve stejném smyslu vektoru, tzv. efektivní síly

$$\mathbf{f}_e(\tau) = m_0 \frac{d\mathbf{U}(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \mathbf{f}_L(\tau)}{d\tau^n} \left( \frac{\kappa}{m_0} \right)^n \quad (2)$$

Rovnici 1 lze do 2 rovnou dosadit, nicméně pro simulaci je vhodné alespoň převést čas na laboratorní. Dále zaměníme rychlost  $\mathbf{U}$  na  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{U}}{\gamma}$

$$m_0 \gamma(t) \frac{d(\gamma(t)\mathbf{v}(t))}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} [\gamma(t)q (\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B})] \left( \frac{\gamma(t)\kappa}{m_0} \right)^n \quad (3)$$

$\gamma$  je Lorentzův faktor a je funkcí času,  $\kappa$  označuje pre-acceleration time,  $q$  elektrický náboj částice,  $m_0$  klidovou hmotnost částice a vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  elektrické a magnetické pole v laboratorní soustavě. Od jistého okamžiku budeme uvažovat rovnoběžná pole v ose  $z$ .

Má smysl analyticky uvažovat jen první dva členy rozvoje, neboť pro  $n = 2$  je ve výrazu na pravé straně třetí derivace polohového vektoru částice  $\mathbf{r}(t)$ .

### Rozvoj do 0. řádu

První člen rozvoje vede na Lorentzovu pohybovou rovnici ve speciální relativitě:

$$m_0 \frac{d(\gamma(t)\mathbf{v}(t))}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

### Rozvoj do 1. řádu

Pro  $n < 2$  dostaneme rovnici

$$m_0 \frac{d(\gamma(t)\mathbf{v}(t))}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}) + \frac{\kappa}{m_0} \frac{d}{dt} [\gamma(t)q (\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B})] \quad (5)$$

Derivace Lorentzova faktoru:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

### Power difference in 1st order

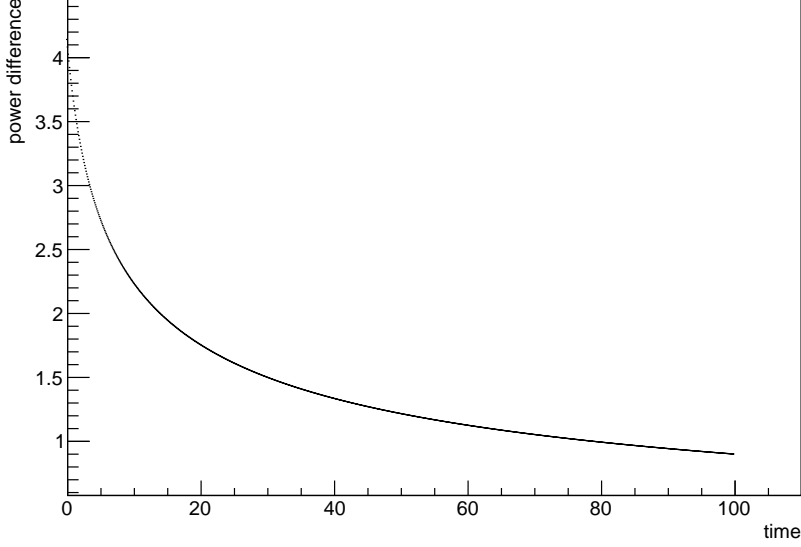


Figure 1: Rozdíl výkonu při rozvoji do prvního řádu

Derivováním a převedením na tenzorový zápis dostáváme

$$\left[ m_0 \frac{\gamma^3}{c^2} v_k v_l + m_0 \gamma \delta_{kl} - \frac{\kappa q}{m_0} \left( \frac{\gamma^3}{c^2} E_k v_l + \frac{\gamma^3}{c^2} \epsilon_{kmn} v_m B_n v_l + \epsilon_{klm} B_m \right) \right] a_l = (6)$$

$$= \gamma q (E_k + \epsilon_{klm} v_l B_m)$$

Dosazením polí  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$  a  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  převedeme na maticovou rovnici

$$\frac{m_0^2 \gamma^2}{c^2 q} \begin{bmatrix} v_1^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} - v_1 v_2 B & v_1 v_2 - \frac{\kappa q}{m_0^2} v_2^2 B - \frac{\kappa q c^2}{m_0^2 \gamma^3} B & v_1 v_3 - \frac{\kappa q}{m_0^2} v_2 v_3 B \\ v_1 v_2 + \frac{\kappa q}{m_0^2} v_2^2 B + \frac{\kappa q c^2}{m_0^2 \gamma^3} B & v_2^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} + v_1 v_2 B & v_2 v_3 + \frac{\kappa q}{m_0^2} v_1 v_3 B \\ v_1 v_3 - \frac{\kappa q}{m_0^2} v_1 E & v_2 v_3 - \frac{\kappa q}{m_0^2} v_2 E & v_3^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} - \frac{\kappa q}{m_0^2} v_3 E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} v_2 B \\ -v_1 B \\ E \end{bmatrix}$$

Analytický výpočet inverzní matice je sice možný, pro simulaci bohužel nepraktický, rychlejší je vypočítat numerickou inverzi v každém kroku integrace. Díky numerické integraci výtoku energie přes uzavřenou krychli okolo částice můžeme z Poyntingova teorému (relativistický případ) spočítat rozdíl od hodnoty z relativistické Larmorovy formule. Ukazuje se, že tento rozdíl je pro první řád nezanedbatelný a klesá s těžkým koncem.

### Vyšší řády

Ve vyšších řádech rozvoje se již objevují vyšší časové derivace Lorentzovy síly, takže analytické řešení ve formě pohybové rovnice není možné. Každá derivace

### Power difference in higher orders - numerical

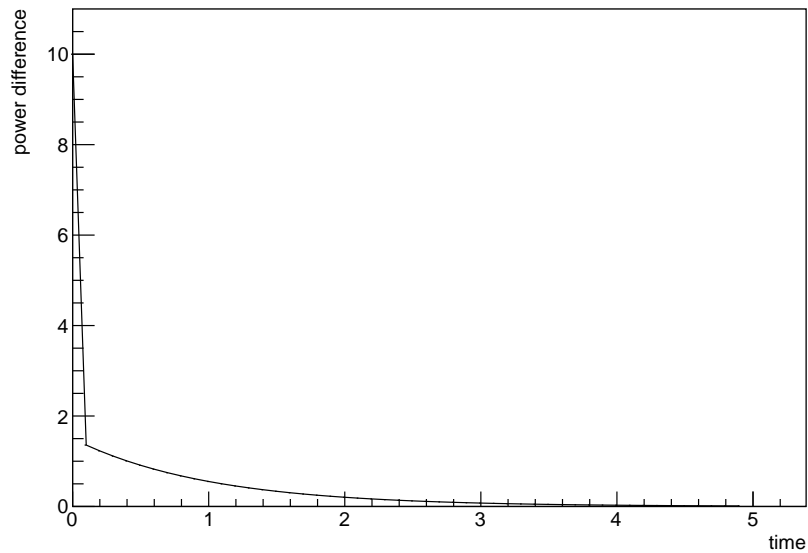


Figure 2: Rozdíl výkonu při numerickém rozvoji do vyšších řádů

se tedy numericky počítala, jakmile příslušný člen byl k dispozici. Výsledek ukazuje, že ačkoliv numerická simulace první dva kroky naprosto selhává, další kroky velmi rychle konvergují (exponenciálně??). Samotný Larmorův poloměr zdánlivě konverguje po přibližně parabolické křivce.

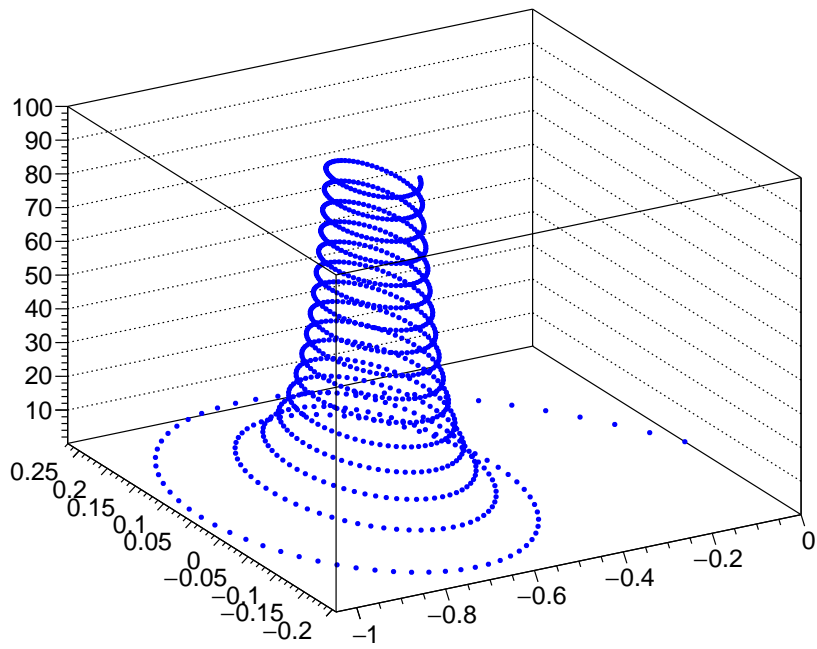


Figure 3: Simulace trajektorie při numerické simulaci do vyšších řádů

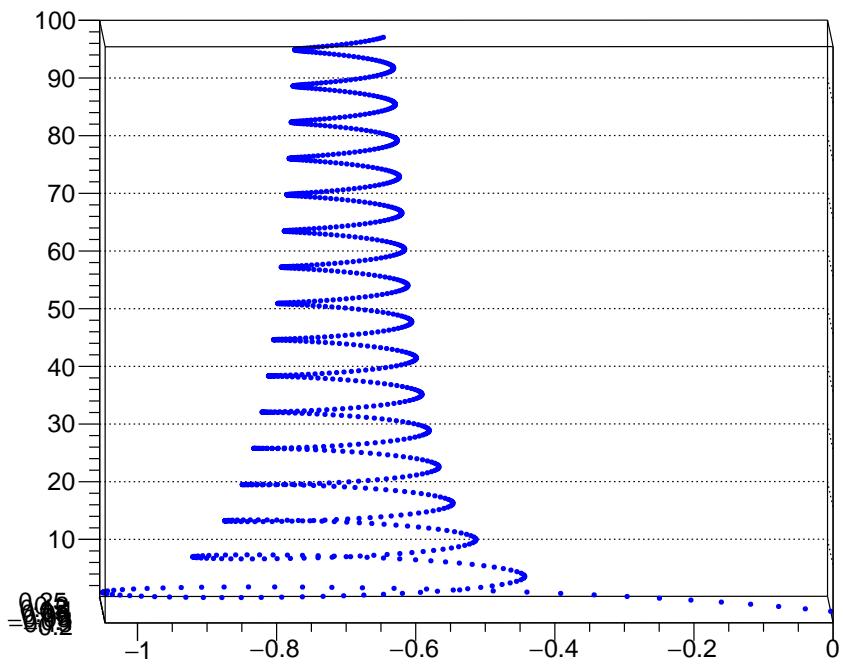


Figure 4: Simulace trajektorie při numerické simulaci do vyšších řádů - profil

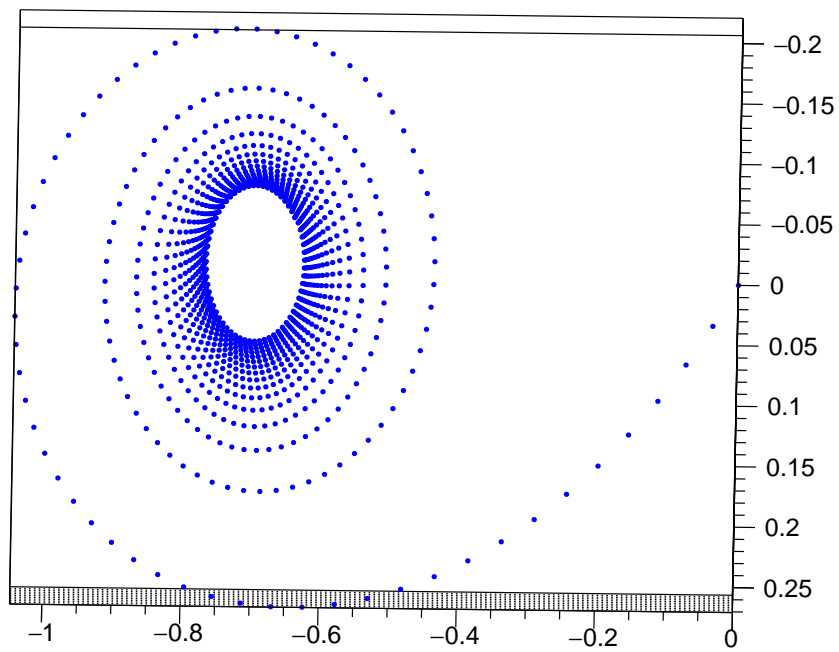


Figure 5: Simulace trajektorie při numerické simulaci do vyšších řádů - transverzální rovina