

1 Pohybove rovnice

1.1 Relativisticka pohybova rovnice castice

Pro pohybovou rovnici

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} \quad (2)$$

lze pomoci transformace $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{v}$ prevest na pohybovou rovnici

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{Q}{m_0} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 + \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2}}} \right]. \quad (3)$$

Doprovodnou rovnici pak bude klasicka rovnice pohybu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 + \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

1.2 Bezrozmerna varianta pohybove rovnice

Jelikoz je γ bezrozmerna, lze vyjit pri odvozovani skalovacich koeficientu z ne-relativisticke verze rovnice (1)

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{x}) = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

Prechod z SI do normalove soustavy bude definovan pomoci vztahu

x	$= x_0 \bar{x}$	E	$= E_0 \bar{E}$
t	$= t_0 \bar{t}$	B	$= B_0 \bar{B}$
v	$= v_0 \bar{v}$	Q	$= Q_0 \bar{Q}$
c	$= c_0 \bar{c}$	m	$= m_0 \bar{m}$

Tabulka 1: Tabulka koeficientu pro prechod ze soustavy SI do normalove soustavy.

Nektere prirodzene koeficienty muzeme volit rovnou $Q_0 = e \rightarrow \bar{Q} = 1$, $m_0 = m_e \rightarrow \bar{m} = 1$. Dosazenim vztahu z Tab.1 do rovnice (5) dostavame podminky pro prechodove koeficienty

$$m_e \bar{m} \frac{x_0}{t_0^2} \frac{d^2}{d\bar{t}^2} \bar{\mathbf{x}} = e \bar{Q} E_0 \bar{\mathbf{E}} + e \bar{Q} v_0 \bar{\mathbf{v}} \times B_0 \bar{\mathbf{B}}. \quad (6)$$

Jelikoz chceme, aby byl zachovan tvar rovnice (5), budou z rovnice (6) plynout celkem 2 podminky

$$\begin{aligned} m_e \frac{x_0}{t_0^2} &= e E_0, \\ m_e \frac{x_0}{t_0^2} &= e v_0 B_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Prvni koeficient dostavame, pokud od sebe rovnice odedeme

$$v_0 = \frac{E_0}{B_0}. \quad (8)$$

Pokud zvolime $t_0 = \frac{m_e}{eB_0}$, pak z obou rovnic dostavame vztah pro x_0

$$x_0 = \frac{m_e E_0}{eB_0^2}. \quad (9)$$

Pro lepsi prubeh reseni diferencialni rovnice vynutime dalsi volbou $\bar{c} = 1$. Pro rychlost plati transformace $v = v_0 \bar{v}$, kde $v_0 = E_0/B_0$, ktera plati i pro transformaci konstanty rychlosti svetla, tedy $c = \frac{E_0}{B_0} \bar{c}$. Touto volbou ziskavame koeficient transformace magnetického pole $B_0 = E_0/\bar{c}$. Posledni volba zbyva na elektricke pole, ktere zvolime prirodzene $E_0 = E_{ext}$. Pak dostavame kompletni prevod mezi SI a normalovou soustavou

Obecne	Koeficient	Initial
$x = x_0 \bar{x}$	$x_0 = \frac{m_e c^2}{e E_{ext}}$	$\bar{x} = (0, 0, 0)^T$
$t = t_0 \bar{t}$	$t_0 = \frac{m_e c}{e E_{ext}}$	$\bar{t} = 0$
$v = v_0 \bar{v}$	$v_0 = c$	$\bar{v} < 1$
$c = c_0 \bar{c}$	$c_0 = c$	$\bar{c} = 1$
$E = E_0 \bar{E}$	$E_0 = E_{ext}$	$\bar{E} = (1, 0, 0)^T$
$B = B_0 \bar{B}$	$B_0 = \frac{E_{ext}}{c}$	$\bar{B} = (100, 0, 0)^T$
$Q = Q_0 \bar{Q}$	$Q_0 = e$	$\bar{Q} = 1$
$m = m_0 \bar{m}$	$m_0 = m_e$	$\bar{m} = 1$

Tabulka 2: Tabulka koeficientu pro prechod ze soustavy SI do normalove soustavy.

Hodnota externiho magnetického pole je zvolena v souladu s transformaci, kdy se predpoklada vnejsi elektricke pole priblizne $E_{ext} = 10^6 \text{ Vm}^{-1}$.

Pohybova rovnice (1) pak bude v normalove soustavě vypadat

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{u}\|_2^2}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

coz dava spolu s integraci polohy, prechodem mezi rychlostmi u a v a zjednodusujicim vztahem $\kappa = 1/\sqrt{1 + \|\mathbf{u}\|_2^2}$ velmi jednoduche pohybove rovnice

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= 1, \\ \dot{u}_y &= 100 \kappa u_z, \\ \dot{u}_z &= -100 \kappa u_y, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \kappa \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (11)$$

1.3 Hamiltonovy rovnice odvozené z Lagrangianu pro relativisticky pohyb

Lagrangian pro relativisticky pohyb je definovan [Kul11]

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (12)$$

jemu odpovídající Hamiltonian pak [Kul11]

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi. \quad (13)$$

Pri podmínce, že elektrické pole je rovnoběžné s polem magnetickým, cíli $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (B_0, 0, 0)$, dostáváme z Hamiltonianu pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{c p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - B_0 Q y)^2 + c^2 m_0^2}} \\ \dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{c p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - B_0 Q y)^2 + c^2 m_0^2}} \\ \dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{c(p_z - B_0 Q y)}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - B_0 Q y)^2 + c^2 m_0^2}} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = Q E_0 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \frac{B_0 Q c(p_z - B_0 Q y)}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - B_0 Q y)^2 + c^2 m_0^2}} \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

1.4 Bezrozměrná varianta Hamiltonových rovnic

Jelikož Hamiltonovy rovnice plynou z rovnice pohybové, lze pro transformaci těchto rovnic do normalové soustavy použít stejné transformací koeficienty jako v případě první rovnice. V rovnicích (14) zastupuje B_0 a E_0 x -ovou složku magnetického a elektrického pole. Po zavedení zjednodušujícího vztahu $\xi = 1/\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - 100y)^2 + 1}$ bude transformace vypadat

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi p_x, \\ \dot{y} &= \xi p_y, \\ \dot{z} &= \xi (p_z - 100y), \\ \dot{p}_x &= 1, \\ \dot{p}_y &= 100 \xi (p_z - 100y), \\ \dot{p}_z &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

2 Počáteční podmínky

Počáteční podmínka na polohu je u všech rovnic stejná $\mathbf{x}_{init} = (0, 0, 0)^T$.

2.1 Pocatecni podminky prvni pohybove rovnice

U prvni rovnice je potreba dodat i pocatecni podminku na rychlost, která je ale transformována pomocí druhého relativistického koeficientu γ . Jelikož v normalové soustavě je $c = 1$, lze například volit $v_0 = 0.8$, α pak označuje úhel, pod kterým částice do pole vletela.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{init} &= (v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha), 0)^T \\ \mathbf{u}_{init} &= \mathbf{v}_{init} / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}_{init}\|_2^2} \\ \mathit{initial} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{init} \\ \mathbf{x}_{init} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

2.2 Pocatecni podminky druhé (\mathcal{H}) pohybove rovnice

U druhé rovnice je potřeba mimo pocatecni polohy dodat ještě i pocatecni hybnost. Ta se do normalové soustavy transformuje pomocí vztahu $p = p_0 \bar{p}$, kde $p_0 = m_e c$. Z pocatecni podminky v SI

$$\mathbf{p}_{init} = \left(\frac{m_0 v_0 \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \frac{m_0 v_0 \sin(\alpha)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, 0 \right)^T \quad (17)$$

tak dostáváme o něco elegantnější

$$\mathbf{p}_{init} = \left(\frac{v_0 \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \frac{v_0 \sin(\alpha)}{\sqrt{1 - v_0^2}}, 0 \right)^T. \quad (18)$$

Pocatecni podminka tedy bude

$$\mathit{initial} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{init} \\ \mathbf{x}_{init} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

3 Simulace

Výsledky simulace lze najít na obr. 1 (patrně na konci tohoto dokumentu).

4 Zdrojové kódy

4.1 Zdrojový kód hlavního programu

```
alpha = 1e-6;
alpha = alpha*pi/180;
v0 = 0.8;
stop=10;

v_init = [v0*cos(alpha);v0*sin(alpha);0];
odmocnina = sqrt(1-(v_init(1)^2+v_init(2)^2+v_init(3)^2));
u_init = v_init*odmocnina;
x_init = [0;0;0];
```

```

initial = [u_init ; x_init];

[T,Y] = ode45(@ode_bez,[0 stop],initial);

%% ode 2
odmocnina = sqrt(1-v0^2);

p_init = [v0*cos(alpha)/odmocnina;v0*sin(alpha)/odmocnina;0];
x_init = [0;0;0];
initial = [p_init ;x_init ];

[T2,Y2] = ode45(@ode_bez2,[0 stop],initial);

```

4.2 Funkce prvni diferencialni rovnice

```

function [ dd ] = ode_bez( t,x )

if(size(x,2) > size(x,1))
    x=x';
end

dd=zeros(size(x));

ux = x(1);
uy = x(2);
uz = x(3);
xi = x(4);
yi = x(5);
zi = x(6);

odmocnina = sqrt(1 + (ux^2 + uy^2 + uz^2));

%du
dd(1) = 1;
dd(2) = 100*uz/odmocnina;
dd(3) = -100*uy/odmocnina;

v = [ux;uy;uz]./odmocnina;
%dx
dd(4) = v(1);
dd(5) = v(2);
dd(6) = v(3);

end

```

4.3 Funkce druhe diferencialni rovnice

```

function [ dd ] = ode_bez2( t,x )

if(size(x,2) > size(x,1))

```

```

        x=x';
end

dd=zeros(size(x));

px = x(1);
py = x(2);
pz = x(3);

xi = x(4);
yi = x(5);
zi = x(6);

odmocnina = sqrt( px^2 + py^2 + (pz - 100*yi)^2 + 1);

%dp
dd(1) = 1;
dd(2) = 100*(pz - 100*yi)/odmocnina;
dd(3) = 0;

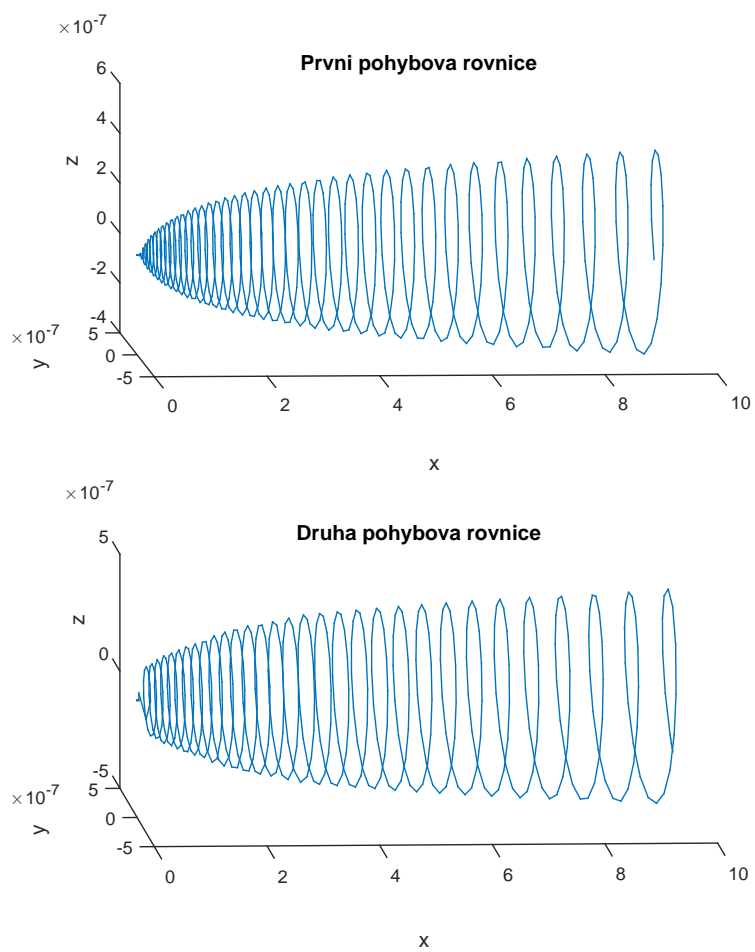
%dx
dd(4) = px/odmocnina;
dd(5) = py/odmocnina;
dd(6) = (pz-100*yi)/odmocnina;

end

```

Reference

[Kul11] P. Kulhánek: *Úvod do teorie plazmatu*. AGA, Praha, 2011. ISBN 978-80-904582-2-2.



Obrázek 1: Trajektorie castice pro simulace první a druhé pohybove rovnice.