Abrahamova-Lorentzova a Lorentzova-Diracova rovnice

Laplaceova rovnice elektrostatiky má jednoduché řešení

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{1.1}$$

V případě elektrodynamiky je přímé zobecnění

$$\Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \phi_\mp(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(t\mp\Delta t,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{1.2}$$

Indexy $\mp$ odpovídají retardovanému a advanceovanému řešení, jenž zohledňuje fakt, že se signál šíří po dobu

$$\Delta t = |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|\,/c \tag{1.3}$$

Obdobně lze zapsat řešení rovnice pro celý čtyřpotenciál splňující Lorentzovu kalibrační podmínku

$$\Box A^\alpha = -\mu_0 J^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad A^\alpha_\mp(t,\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^\alpha(t\mp\Delta t,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{1.4}$$

Řešení v retardovaném čase $t-\Delta t$ je skutečné řešení problému a počítá potenciál z událostí proběhlých v kuželu minulosti, advanceované řešení je řešením vlnové rovnice, které přichází „z budoucnosti“, a je nekauzální. Potenciál sledujeme v místě $\mathbf{x}$, jde tedy o polohu pozorovatele. Náboje jsou lokalizovány v místech $\mathbf{x}'$, přes které integrujeme. Dosti daleko od zdrojů je možné provést klasický multipólový rozvoj, ovšem pro hledání reakce částice na vlastní pole je zapotřebí postup opačný – vyjádřit pole co nejblíže částici. V takovém případě bude rozdíl času pozorovatele a času vyslání signálu malý a provedeme v něm Taylorův rozvoj:

$$J^\alpha\left(t \mp \Delta t, \mathbf{x}'\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mp\Delta t)^k}{k!}\frac{\partial^k J^\alpha(t,\mathbf{x}')}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mp\frac{|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|}{c}\right)^k \frac{1}{k!}\frac{\partial^k J^\alpha(t,\mathbf{x}')}{\partial t^k} \tag{1.5}$$

Čtytřpotenciál bude

$$A^\alpha_\mp(t,\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(\mp 1)^k}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|^{k-1}\, J^\alpha(t,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'\right], \tag{1.6}$$

Výraz rozdělíme na sudé a liché členy:

$$\begin{aligned} A^\alpha_\mp(t,\mathbf{x}) = {} & \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=0,2,4}^{\infty}\left[\frac{(\mp 1)^k}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|^{k-1}\, J^\alpha(t,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'\right]\mp \\ & \mp\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\left[\frac{1}{c^k k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int |\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|^{k-1}\, J^\alpha(t,\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}'\right], \end{aligned} \tag{1.7}$$

První část je shodná pro retardované i advanceované řešení a má pro $k = 0$ část divergující na světočáře částice, jde například o Coulombická pole, která sice divergují, ale odpovídající síla je symetrická vůči částici a výslednice je proto nulová a na částici nepůsobí. Druhá část má jiné znaménko pro retardovaný a jiné pro advanceovaný potencál, řešení se liší pro vlnu přicházející k částici a pro vlnu od ní odcházející. Tato část na světočáře nediverguje, výslednice je na ní nenulová a odpovídá reakci částice na vlastní pole. Fyzikálním řešením je retardovaný potenciál, ten lze ale formálně rozložit na symetrickou a antisymetrickou část

$$A^{\alpha} = A^{\alpha}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{r}} + A^{\alpha}_{\mathrm{a}}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{r}} - A^{\alpha}_{\mathrm{a}}\right) \tag{1.8}$$

U symetrické části vymizí všechny liché členy a je dána první částí výrazu (1.7):

$$A^{\alpha}_{\mathrm{S}} \equiv \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{r}} + A^{\alpha}_{\mathrm{a}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=0,2,4\ldots} \left[\frac{1}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \,|^{k-1} \; J^{\alpha}(t,\mathbf{x}')\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \right] \tag{1.9}$$

Antisymetrická část potenciálu odpovídá sudým členům rozvoje (1.7):

$$A^{\alpha}_{\mathrm{A}} \equiv \frac{1}{2}\left(A^{\alpha}_{\mathrm{r}} - A^{\alpha}_{\mathrm{a}}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1,3,5\ldots} \left[\frac{1}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \,|^{k-1} \; J^{\alpha}(t,\mathbf{x}')\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \right] \tag{1.10}$$

Na světločáře částice nediverguje a výslednice odpovídajících sil působících na částici je nenulová. Tato síla představuje reakci částice na svá vlastní pole. Najdeme ji v Lorentzově souřadnicové soustavě lokálně spojené s částicí, kde postačí vzít jen první nenulový člen.
U skalárního potenciálu je člen $k = 1$ nulový, protože integrál vpravo dá celkový náboj a jeho derivace je nulová. První nenulový člen proto bude až pro $k = 3$:

$$\frac{\phi}{c} \equiv -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c^3 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int |\, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \,|^2 \; \rho_Q(t,\mathbf{x}')\, c\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \tag{1.11}$$

První nenulový člen pro vektorový potenciál bude pro $k = 1$:

$$\mathbf{A} \equiv -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j}_Q(t,\mathbf{x}')\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \tag{1.12}$$

Pro bodovou částici se světločárou $z^{\alpha}(\tau)$ bude

$$\begin{aligned} \rho_Q(t,\mathbf{x}) &= Q\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \\ \mathbf{j}_Q(t,\mathbf{x}) &= Q\, \mathbf{v}\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Odpovídající potenciály po integraci jsou

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\mu_0 Q}{24\pi c} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} \left(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)\right)^2 , \\ \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{v}(t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Odpovídající pole jsou:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 Q}{24\pi c} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} \nabla \left(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{v}(t) = \\ &= \frac{\mu_0 Q}{24\pi c} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} 2\left(\mathbf{x} - \mathbf{z}\right) + \frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \\ &= -\frac{\mu_0 Q}{12\pi c} \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi c} \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Síla od reakce na vlastní pole proto má tvar:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{R}} = Q\,\mathbf{E} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c}\dot{\mathbf{a}} \tag{1.16}$$

Tato síla se nazývá Abrahamova-Lorentzova síla. Příslušná pohybová rovnice se nazývá Abrahamova-Lorentzova pohybová rovnice:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c}\dot{\mathbf{a}} \tag{1.17}$$

Rovnici lze přepsat do tvaru

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + m\,\tau_0 \dot{\mathbf{a}}\,; \qquad \tau_0 \equiv \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c m}. \tag{1.18}$$

Konstanta τ_0 má rozměr času (tzv. *preacceleration time*). Problémy rovnice jsou zjevné: 1) třetí derivace polohy vyžaduje nejasnou dodatečnou počáteční podmínku. 2) I při nulové externí síle existují nefyzikální řešení rostoucí exponenciálně s časem. 3) Pro sílu, která je nenulová od času t_0 (byť konstantní), závisí řešení v čase $t < t_0$ na hodnotě síly v budoucnosti.

Výkon souvisící s generováním vlastních polí je

$$P = \mathbf{F}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c}\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{a}^2\right]. \tag{1.19}$$

Pro částici s konstantní rychlostí je výkon nulový, při periodickém pohybu částice září. Střední hodnota první části bude v tomto případě nulová, proto

$$\left\langle P \right\rangle = -\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} a^2 \tag{1.20}$$

a částice ztrácí zářením energii. Obecné řešení rovnice (1.18) je

$$\mathbf{a}(t) = \mathrm{e}^{t/\tau_0}\left[\mathbf{C} - \frac{1}{m\tau_0}\int_{-\infty}^{t} \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t')\,\mathrm{e}^{-t'/\tau_0}\,\mathrm{d}t'\right] \tag{1.21}$$

Pro konstantní sílu vynořivší se v čase t_0 lze zvolit $\mathbf{C}$ tak, aby nefyzikální exponenciální řešení vymizelo, řešení v časech $t < t_0$ ale bude závislé na hodnotě síly v $t > t_0$, což je nepřijatelné. Řešení rovnice (1.18) lze zapsat v tvaru, který zcela eliminuje nefyzikální exponenciálně narůstající řešení:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m}\int_{0}^{\infty} \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t + s\tau_0)\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \tag{1.22}$$

Problém narušení kauzality ale přetrvává. Jiným zajímavým řešením problémů je předpoklad, že radiační člen v (1.18) je malý, což umožňuje odhadnout zrychlení iteračně:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}}{m} \tag{1.23}$$

a tuto první iteraci dosadit do pravé strany rovnice (1.18):

$$m\,\mathbf{a} \approx \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} + \tau_0 \dot{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}. \tag{1.24}$$

Podle Erica Poissona má platit, že v limitě zdroje pole malých rozměrů (čas, za který prolétne signál oblast zdroje je podstatně menší než charakteristický čas změn silového pole) dává tato nerelativistická rovnice stejná řešení jako původní rovnice, ale nemá problémy s třetími derivacemi a neposkytuje zavrženíhodná nefyzikální řešení. Prosté homogenní pole ale úvahu Poissona o rovnosti obou přístupů neguje.

Pokud nebudeme v Lorentzově souřadnicové soustavě lokálně spojené s částicí, je přímé zobecnění pohybové rovnice (1.18) na libovolnou soustavu

$$m\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\mathrm{ext}} \; + \; m\tau_0\left(\frac{\mathrm{d}a^\alpha}{\mathrm{d}\tau} - a^2U^\alpha\right); \qquad a^2 \equiv a^\beta a_\beta\,. \tag{1.25}$$

Jde o známou Lorentzovu-Diracovu pohybovou rovnici, kterou odvodil P. A. M. Dirac za pomoci úvah o zachování čtyřhybnosti soustavy pole a částice. Druhý člen můžeme upravit (čtyřzrychlení je vždy kolmé na čtyřrychlost $a_\beta U^\beta = 0$):

$$a^2U^\alpha = a^\beta a_\beta U^\alpha = a^\beta\frac{\mathrm{d}U_\beta}{\mathrm{d}\tau}U^\alpha = -\frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\tau}U_\beta U^\alpha$$

a LD rovnici psát v alternativním tvaru, v němž je radiační síla úměrná časové derivaci zrychlení

$$m\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\mathrm{ext}} \; + \; m\tau_0\left(g^\alpha{}_\beta + U_\beta U^\alpha\right)\frac{\mathrm{d}a^\beta}{\mathrm{d}\tau}. \tag{1.26}$$

Relativistické zobecnění iterační náhražky (1.24) je také přímočaré:

$$\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = F^\alpha_{\mathrm{ext}} \; + \; \frac{\tau_0}{m}\left(g^\alpha{}_\beta + U_\beta U^\alpha\right)F^\beta_{\mathrm{ext},\gamma}U^\gamma. \tag{1.27}$$