

Adiabatický invariant

19. 8. 2015 Martin Žáček, ČVUT FEL, katedra fyziky, zacekm@fel.cvut.cz

V tomto textu je použita Einsteinova sumační konvence.

1. Obecný adiabatický invariant

Mějme fyzikální systém s n stupni volnosti, kanonické souřadnice necht' jsou $q_i, i = 1, \dots, n$ a v celém textu budou indexy nabývat těchto hodnot, nebude-li explicitně řečeno jinak. Necht' je dána Lagrangeova funkce systému $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, kanonické hybnosti tedy můžeme vyjádřit jako

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.1)$$

a Lagrangeovy dynamické rovnice jsou tvaru

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (1.2)$$

Předpokládejme, že systém má takové vlastnosti, že pokud v Lagrangeově funkci zafixujeme čas t , bude existovat periodické řešení, které budeme parametrizovat parametrem κ s hodnotami z intervalu $(0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\kappa, t), \\ p_i &= p_i(\kappa, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde předpokládáme, že řešení je spojitě i spojitě diferencovatelné v obou argumentech. Definujme veličinu J , kterou vyjádříme pomocí integrálu přes jednu periodu (integrujeme tedy při konstantním čase t v řešení (1.3))

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \oint dq_i p_i = \oint d\kappa p_i \frac{\partial q_i}{\partial \kappa}, \quad (1.4)$$

a vyjádříme jeho úplnou derivaci podle času, využijeme přitom záměnnost pořadí derivací,

$$\frac{dJ}{dt} = \oint d\kappa \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial p_i}{\partial \kappa} + p_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q_i}{\partial \kappa} \right) = \oint d\kappa \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \kappa} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \kappa} \right) = \oint d\kappa \frac{\partial L}{\partial \kappa}. \quad (1.5)$$

Protože ale L nezávisí explicitně na κ , je

$$\frac{dJ}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

Dokázali jsme tedy, že veličina J nezávisí na čase a nazývá se Poincarého invariant.

Poznámka 1: Lze snadno nahlédnout, že každý člen v integrálu (1.4) lze integrovat nezávisle a že výsledný integrál je roven ploše ohraničené průměty trajektorie do jednotlivých rovin (q_k, p_k) .

Poznámka 2: Upozorníme raději zvlášť na to, že integrál (1.4) je konstanta nikoliv pro jednu konkrétní trajektorii, to by bylo zřejmé již ze samotného tvaru (1.4) ale pro různé (téměř) uzavřené trajektorie téhož systému při různých časech.

Kdybychom chtěli přejít k parametrizaci řešení (1.3) od fáze k času měnícímu se během jedné periody (čas ve druhém argumentu necháváme stále zafixovaný a proto jej nevyznačujeme), dostaneme

$$q_i = q_i(\kappa) = q_i(\omega t + \varphi) \quad (1.7)$$

Kde úhlová frekvence ω a počáteční fázový úhel φ jsou konstantní parametry.

Předpokládejme nyní, že systém již není autonomní, tedy že Lagrangeova funkce závisí na čase. Obecné řešení (1, 3) pro tento případ můžeme chápat jako řešení podobné periodickému ve tvaru

$$q_i = q_i(\omega(t)t + \varphi(t), t). \quad (1.8)$$

kdy se nyní s časem mění úhlová frekvence, fázový úhel a přes explicitní závislost na čase se může měnit například amplituda. Vyjádříme nyní veličinu podobnou Poincarého invariantu (1.4) pro tento případ

$$\mathfrak{J} \stackrel{\text{def}}{=} \int dq_i p_i = \int d\kappa p_i \frac{\partial q_i}{\partial \kappa}, \quad (1.9)$$

Přičemž abychom dobře definovali, přes jakou část trajektorie se integruje (již není uzavřená), přešli jsme opět substitucí k nezávisle proměnné κ a integrujeme od 0 do 2π .

Využijeme výsledku (1.5) a vyjádříme časovou derivaci

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \int d\kappa \frac{\partial L(t)}{\partial \kappa} = \int d\kappa \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \kappa} = \int d\kappa \frac{\partial L}{\partial t} \frac{1}{\omega} \approx \frac{1}{\omega} \frac{\partial L}{\partial t} \int d\kappa = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial L}{\partial t} = T \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Kde jsme derivaci času podle κ vyjádřili ze vztahu $\kappa(t) = \omega(t)t + \varphi(t)$ a předpokládali, že frekvence i derivace Lagrangeovy funkce jsou během jedné periody přibližně konstantní a $T = 2\pi/\omega$ je perioda, kterou je ovšem již nutno brát pouze za přibližnou hodnotu, neboť se v čase také mění. Veličina $\mathfrak{J}$ již není invariant, ale podobá se invariantu v případě, kdy se Lagrangeova funkce mění během jedné periody málo. Nazývá se **adiabatický invariant**. Bude-li však po celou sledovanou τ dobu platit

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} \ll \frac{\mathfrak{J}}{\tau}, \quad (1.11)$$

adiabatický invariant $\mathfrak{J}$ bude přibližně konstantní podobně, jako je Poincarého invariant J . Po dosažení (1.11) a uvažování že $\mathfrak{J} \approx LT$ (je vidět z (1.9), máme podmínku

$$\frac{\partial L}{\partial t} \ll \frac{L}{\tau}. \quad (1.12)$$

Literatura: Peter A. Sturrock: Plasma Physics, Cambridge University Press 1994, z této knihy použit důkaz nezávislosti Poincarého invariantu na čase, v některých detailech mírně pozměněný, jelikož mi tak dával větší logiku, ostatní jsou vlastní výpočty.

Poznámka: Na dva různé varianty s různými názvy rozděluje adiabatický invariant Sturrock ve své učebnici plazmatu ale možná bude lepší to takto nezavádět, definice je stejná, liší se to jen Lagrangianem, který je v prvním případě časově nezávislý a ve druhém závislý.

2. Adiabatický invariant pro nerelativistickou částici

Lagrangián částice s Lorentzovou silou (uvažujme zatím obecně, tj. elektromagnetický čtyřpotenciál je funkcí souřadnice a času) je

$$L = \frac{m\dot{x}_i\dot{x}_i}{2} - q(\phi - \dot{x}_j A_j) = \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.1)$$

Kanonické hybnosti (1.1) jsou

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i + qA_i \quad (2.2)$$

(upozorníme, že se liší se od „obyčejných“ hybností členem s vektorovým potenciálem $\mathbf{A}$). Pohybové rovnice (1.2) budou mít tvar

$$m\dot{v}_i + q \frac{\partial A_i}{\partial t} = q \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \dot{v}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

neboli ve vektorovém tvaru

$$m\mathbf{v} + q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = q(-\nabla\phi + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}). \quad (2.4)$$

Konstantní magnetické pole

Uvažujme magnetické pole $\mathbf{B} = 0, 0, B$, s ním svázaný vektorový potenciál například $\mathbf{A} = -By, 0, 0$ a s identicky nulové elektrické pole s potenciálem $\phi = 0$. Kanonické hybnosti pro tento případ dostaneme jako

$$\left. \begin{aligned} p_x &= mv_x + qBy, \\ p_y &= mv_y, \\ p_z &= mv_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

a Lagrangeovy rovnice budou mít tvar

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x + qv_y B &= 0, \\ m\dot{v}_y &= -qv_x B, \\ m\dot{v}_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

což jsou ale známé rovnice, jejichž řešením je gyrační pohyb po kružnici v rovině kolmé na $\mathbf{B}$ s Larmorovou úhlovou frekvencí

$$\omega_L = \frac{qB}{m} \quad (2.7)$$

a Larmorovým poloměrem

$$R_L = \frac{v_x^2 + v_y^2}{\omega_L} = \frac{mv_{\perp}^2}{qB}. \quad (2.8)$$

Spočítejme nyní Poincarého invariant (1.4)

$$J = \oint (mv_x - qA_x) dx + mv_y dy + mv_z dz = \int_t^{t+T} [dt (mv_x - qBy) v_x + mv_y^2 + mv_z^2] =$$

$$= mv^2 T - qB \int_t^{t+T} dt y v_x = mv^2 T - qB \int_t^{t+T} dt \underbrace{v_\perp \sin(\omega_L t + \varphi)}_{v_x} \left(\underbrace{R_L \sin(\omega_L t + \varphi) - y_0}_y \right). \quad (2.9)$$

Poslední integrál se rozdělí na dva členy, první vyjde $\frac{1}{2} v_\perp R_L T$, druhý bude nulový, za periodu dosadíme $T = 2\pi R_L / v_\perp$ a dostaneme po úpravách výsledný tvar

$$J = mT \left(v_\perp^2 - \frac{1}{2} v^2 \right) = 2\pi m R_L \left(v_\perp - \frac{v^2}{2v_\perp} \right). \quad (2.10)$$

Tenhle výsledek je zajímavý, mimochodem odlišný od Petrova výsledku v jeho TM1, je to ale tím, že použil v adiabatickém invariantu obyčejné hybnosti, správně měly být kanonické hybnosti (2.2) ale pokud bude $v = v_\perp$, výsledek je buď týž, nebo se liší jednou polovinou, což je ale jen neměnná konstanta, s ní i bez ní pořád půjde o invariant. Výhodou tohoto výpočtu je, že vyjde i pro nehomogenní pole, s oběma složkami rychlosti, rovnou z obecného adiabatického invariantu.

Relativistický výpočet mám zatím jen na papírech, mohu to sepsat, jen myslím, že jsem si ty papíry nechal doma, přikládám ale do přílohy, možná to sepíšu i bez těch mých poznámek, dost si to pamatuju a byl to v podstatě výpočet podle toho Sturocka.

1. Sturock: Plasma Physics, tam je odvození adiabatického invariantu obecně, bez Hamiltonových rovnic, stručněji a elegantněji, pak relativistické řešení Lorentzovy částice v polárních souřadnicích, to se líbilo Vojtovi, jelikož si lámal hlavu, jak definovat ten poloměr, není to tam ovšem rozřešeno, jakou korekci dá člen z $\partial \mathbf{B} / \partial T$, který způsobí nenulové $\mathbf{E}$ a zpomalení nebo urychlení částice, díval jsem se do tvé Fyziky plazmatu, tam to máš, jen ovšem nerelativisticky. Pokud se to spočítá i relativisticky, ověří se případně podmínka (1.12) pro Lorentzovu částici relativisticky.
2. Mechanics Physics 151 Lecture 17 Special Relativity <http://users.physics.harvard.edu/~morii/phys151/lectures/Lecture17.pdf>, což je přehled toho, co potřebujeme, jak ad hoc přístup na základě hádání Lagrangiánu, tak korektní výpočet v invariantním tvaru, není tam jen adiabatický invariant,
3. Chapter 5 The Relativistic Point Particle <http://fma.if.usp.br/~amsilva/Livros/Zwiebach/chapter5.pdf> zde je docela dobře udělaný pohyb relativistické částice, Pro Vojtu budou zajímavé ty poznámky k parametrizaci trajektorie, konzultoval to se mnou. Ale opět neřeší adiabatický invariant, ten jsem našel jen v tom Sturockovi.