

Gyrační poloměr jako invariant relativistického pohybu nabité částice v konfiguraci rovnoběžného konstantního vnějšího elektromagnetického pole

1 Popis problému

Uvažujme pohyb nabité částice v $\mathbb{E}^3$ v takové konfiguraci elektrického a magnetického pole, že $\mathbf{E} = g\mathbf{B}$, kde g je nějaká reálná konstanta a magnetické pole je homogenní. V nerelativistickém přiblížení pro nenulovou projekci počáteční rychlosti do roviny ρ kolmé k $\mathbf{B}$ pozorujeme charakteristickou trajektorii, částice „gyruje“. Zjednodušeně řečeno, projekce trajektorie pohybu částice do roviny ρ je kružnicí. BÚNO volíme kartézské souřadnice tak, aby magnetické pole leželo ve směru osy z , tedy

$$\mathbf{B} = (0, 0, B)$$

$$\mathbf{E} = g\mathbf{B}$$

Rovina ρ pak bude shodná s rovinou XY. Má-li být Larmorův poloměr konstantní, trajektorií částice pro libovolné počáteční podmínky v projekci do ρ bude kružnice (silný předpoklad).

2 Nerovnoměrný pohyb po kružnici v $\mathbb{R}^2$

2.1 Zavedení pohybu po kružnici

Nejdříve přehled základních vztahů pro pohyb po kružnici, obecně libovolně zrychlený. Samotné vztahy jsou odvozeny pomocí transformace do polárních souřadnic. Kruhový pohyb má rovnice

$$x = R_L \cos [\phi(t)]$$

$$y = R_L \sin [\phi(t)]$$

pro konstantní R_L , přičemž $\phi(t)$ je obecná spojitá funkce laboratorního času t . Spojitost plyne z podmínek pro řešení obecné pohybové rovnice v klasické mechanice. Časovou derivaci budeme značit čárkou. Odvozené vztahy pro rychlost a zrychlení v souřadnicích XY:

$$x' = -y\phi'(t)$$

$$y' = x\phi'(t)$$

$$x'' = -[y\phi''(t) + x\phi'^2(t)]$$

$$y'' = x\phi''(t) - y\phi'^2(t)$$

Standardně zavedeme vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{v} = (x', y')$$

$$\mathbf{a} = (x'', y'')$$

Obecné zrychlení není kolmé na rychlost. Pro kruhový pohyb položíme velikost (tečné) rychlosti v do rovnosti

$$v(t) = R_L \phi'(t)$$

Z transformace i z konstantní vzdálenosti od počátku je jasné, že nemusíme rozlišovat mezi obecnou rychlostí a její tečnou složkou v kruhovém pohybu. Zrychlení ale rozložíme na podélné a dostředné:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_d$$

Uměle zavedeme:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_p(t) &= (-y\phi''(t), x\phi''(t)) \\ \mathbf{a}_d(t) &= (-x\phi'^2(t), -y\phi'^2(t))\end{aligned}$$

Dále už vynecháme závislosti na čase t , jediné konstanty jsou: Larmorův poloměr R_L , velikost mag. pole B a konstanta lineární závislosti g . Ostatní objekty jsou funkcemi času.

2.2 Podstatné vztahy

Velikost podélné a kolmé složky zrychlení je

$$\begin{aligned}||\mathbf{a}_p|| &= |R_L \phi''| \\ ||\mathbf{a}_d|| &= |R_L \phi'^2| = \frac{v^2}{R_L}\end{aligned}$$

Skalární součin dostředné složky zrychlení a vektoru rychlosti:

$$\mathbf{a}_d \cdot \mathbf{v} = xy\phi'^3 - xy\phi'^3 = 0$$

Skalární součin obecného zrychlení a vektoru rychlosti:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a}_d \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v} = y^2 \phi' \phi'' + x^2 \phi' \phi'' = R_L^2 \phi' \phi''$$

což plyne z vlastnosti seskvilineární formy reálných funkcí a vztahu

$$R_L^2 = x^2 + y^2$$

Z předchozího dále plyne

$$|\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v}| = ||\mathbf{a}_p|| \cdot ||\mathbf{v}||$$

čili podélná složka zrychlení je rovnoběžná s $\mathbf{v}$.

Nejdůležitější je ovšem vztah pro velikost dostředné složky zrychlení:

$$||\mathbf{a}_d|| = \sqrt{\phi'^4 x^2 + \phi'^4 y^2} = \sqrt{R_L^2 \phi'^4} = R_L \phi'^2 = \frac{v^2}{R_L}$$

3 Ověření kruhového pohybu částice v poli

3.1 Myšlenka ověření

Naším cílem je tedy ověřit, zda jsme schopni převést pohybové rovnice do tvarů odvozených výše. Protože hlavním problémem je relativistický vliv na příčné složky rychlosti, velikost dostředného zrychlení by měla zachovávat tvar

$$||\mathbf{a}_d|| = K\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

kde K je konstanta, jejíž reciproká hodnota bude rovna Larmorovu poloměru. Dále musí zůstat zachovány hodnoty příslušných skalárních součinů vektorů zrychlení a rychlosti. Tento postup by dále mohl vést k pochopení jakým způsobem se relativistické skládání rychlostí promítá do podélné složky zrychlení takového pohybu po kružnici.

3.2 Pohybové rovnice a notace

Rovnice obecného pohybu ve vnějším elektromagnetickém poli v prostoru $\mathbb{E}^3$ jsou

$$(\gamma\mathbf{v})' = \frac{Q}{m_0}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

pro náboj částice Q , klidovou hmotu m_0 a Lorentzův faktor γ . Náboj i klidová hmotnost jsou konstantní. V naší konfiguraci rovnoběžného homogenního pole v ose z lze rovnice zjednodušit na

$$(\gamma v_x)' = \frac{QB}{m_0}v_y$$

$$(\gamma v_y)' = -\frac{QB}{m_0}v_x$$

$$(\gamma v_z)' = \frac{QB}{m_0}g$$

První dvě rovnice jsou svázány se třetí faktorem γ , definovaným jako

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}}$$

Zobecníme γ na jakoukoliv alespoň jednou spojitě diferencovatelnou funkci času s definičním oborem $\langle 0, \infty \rangle$ a oborem hodnot $\langle 1, \infty \rangle$. Třetí rovnice se tak stane přebytečnou a můžeme obecně pracovat se třídou soustav rovnic typu

$$(\gamma v_x)' = H v_y$$

$$(\gamma v_y)' = -H v_x$$

kde v naší konfiguraci platí $H = \frac{QB}{m_0}$, obecně je však nějakou konstantou.

3.3 Odvození vektorů zrychlení

V zadané konfiguraci zavedeme vektor $\mathbf{F}$ jako

$$\mathbf{F} = (\gamma \mathbf{v})' = (Hv_y, -Hv_x)$$

Protože $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$, formálně zderivujeme prostřední výraz a vyjádříme zrychlení:

$$\begin{aligned} (\gamma \mathbf{v})' &= \gamma' \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v}' \\ \gamma \mathbf{v}' &= (\gamma \mathbf{v})' - \gamma' \mathbf{v} = \mathbf{F} - \gamma' \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{F} - \frac{\gamma'}{\gamma} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F} - \frac{\gamma'}{\gamma} \mathbf{v}$$

Zkusmo rozdělíme vzniklý výraz na podélnou a dostřednou složku:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p &= -\frac{\gamma'}{\gamma} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_d &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{F} \end{aligned}$$

Je okamžitě jasné, že takto definovaná podélná složka $\mathbf{a}_p$ je rovnoběžná s $\mathbf{v}$. Zbývá ověřit skalární součin dostředné složky s rychlostí $\mathbf{v}$ a velikost dostředné složky. Kolmost vektorů lze ověřit snadno:

$$\mathbf{a}_d \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{QB}{\gamma m_0} (v_y v_x - v_x v_y) = 0$$

Výpočet velikosti dostředné složky ovšem povede k následujícímu problému:

$$\|\mathbf{a}_d\| = \left\| \frac{1}{\gamma} \mathbf{F} \right\| = \frac{|H|}{\gamma} \sqrt{v_y^2 + v_x^2} = \frac{|H|}{\gamma} v$$

kde v označuje velikost rychlosti. Tento výraz musí odpovídat vztahu odvozenému výše pro kruhový pohyb, tedy

$$\frac{|H|}{\gamma} v = \frac{v^2}{R_L}$$

Pro $v = 0$ je vztah splněn vždy, hledáme tedy dál:

$$R_L |H| = \gamma v$$

Protože výraz na levé straně má být konstantní v čase, musí být konstantní i výraz na pravé straně, tedy

$$(\gamma v)' = 0$$

Zavedením vektoru $\mathbf{u} := \gamma \mathbf{v} = (\gamma v_x, \gamma v_y)$ můžeme vztah upravit:

$$\left(\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right)' = 0$$

$$\left[\sqrt{\gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_y^2} \right]' = 0$$

Výraz v derivaci je velikost vektoru $\mathbf{u}$ (označíme u) a problém tak lze převést na vztah

$$u' = 0$$

Vektor u je pouze funkcí času, stejně tak jako vektor rychlosti. Časová derivace jeho velikosti je tak

$$u' = \left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \right)' = \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} (u_x u'_x + u_y u'_y)$$

Je třeba si uvědomit, že složkám u'_x a u'_y odpovídají složky vektoru $\mathbf{F}$. Z identit $u_x = \gamma v_x$ a $u_y = \gamma v_y$ tak substitucí dostáváme

$$u' = \frac{\gamma H}{\gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} (v_x v_y - v_y v_x) = 0$$

což dokazuje výše uvedenou podmínku pro velikost dostředného zrychlení. Lorentzův faktor se zde navíc úplně vykompenzoval ve výrazu před závorkou.

4 Závěr

Předpoklady kruhového pohybu se podařilo ověřit v rámci podmínek uvedených v textu. Interpretace výsledku zní následovně: *Pro relativistickou částici, pohybující se v homogenním magnetickém poli, nevede spojitě urychlování ve směru magnetických silokřivek ke změně gyračního poloměru.*

Larmorův poloměr odvodíme z počátečních podmínek:

$$R_L = \sqrt{\frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{\left(\frac{QB}{m_0}\right)^2 \left(1 - \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2}{c^2}\right)}} = \frac{\gamma_0 m_0 v_{\perp 0}}{|QB|}$$

kde $v_{\perp 0} = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$ je počáteční kolmá rychlost a γ_0 počáteční hodnota Lorentzova faktoru.

Dále, jednoduchou úvahou z faktu, že

$$\gamma v_{\perp} = \gamma \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{konst.}, R_L = \text{konst.}$$

dospějeme k závěru, že při spojitě urychlování částice ve směru silokřivek magnetického pole se bude měnit velikost kolmé složky rychlosti a tedy gyrační frekvence.