

**Západočeská univerzita v Plzni**

**Fakulta aplikovaných věd**

Katedra matematiky

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Kvaterniony a jejich užití v geometrii**

Plzeň, 2006

Jitka Prošková

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ podpis



## Poděkování

Děkuji především vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. M. Lávičkovi, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce a poskytování cenných rad při jejím zpracování. Děkuji též ostatním, kteří mi přispěli pomocí k jejímu dokončení.

## Abstrakt

Tato práce je zaměřena na popis rotací ve čtyřrozměrném prostoru s využitím kvaternionů. Je zde zpracována základní charakteristika tělesa kvaternionů a uvedeny různé přístupy zavedení. Dále nabízí stručný popis grup  $\mathbf{SO}(3)$ ,  $\mathbf{SO}(4)$  a jejich souvislost s rotacemi a kvaterniony. V textu naleznete zmínku i o jiných způsobech reprezentace rotace. Jsou zde popsány vztahy mezi některými dalšími reprezentacemi rotace a kvaterniony s jednoduchými příklady. Můžete zde nalézt i různé příklady využití.

## Klíčová slova

Kvaternion, algebra kvaternionů, historie kvaternionů, grupa  $\mathbf{SO}(n)$ , rotace v  $\mathbf{SO}(4)$ , rotace v  $\mathbf{SO}(3)$ , reprezentace osa–úhel, oktoniony.

## Abstract

This thesis is aimed at rotation in a four-dimensional space using quaternions. Elementary characteristics of quaternions field are presented and different approaches to its implementation are stated here. This thesis also states a short description of  $\mathbf{SO}(3)$  and  $\mathbf{SO}(4)$  groups and their connection with rotations and quaternions. A note about another ways of representation of rotation can be found in this text as well. Relations between some other representations of rotation and quaternions are described here, including simple examples. You can find here a various examples of using quaternions.

## Key words

Quaternions and their using in geometry, quaternion, algebra of quaternions, group  $\mathbf{SO}(n)$ , rotation in  $\mathbf{SO}(4)$ , rotation in  $\mathbf{SO}(3)$ , representation axis–angle, octonions.

---

# Obsah

Přehled použitého značení	8
<b>1 Úvod</b>	<b>9</b>
<b>2 Historie kvaternionů</b>	<b>10</b>
2.1 Historie komplexních čísel . . . . .	10
2.2 Rozšiřování oboru komplexních čísel . . . . .	11
2.3 Oktoniony . . . . .	12
<b>3 Algebra kvaternionů</b>	<b>13</b>
3.1 Úvodní pojmy . . . . .	13
3.2 Základní vlastnosti . . . . .	14
<b>4 Kvaterniony a rotace v <math>\mathbf{SO}(4)</math> a <math>\mathbf{SO}(3)</math></b>	<b>21</b>
4.1 Grupy $\mathbf{O}(n)$ , $\mathbf{SO}(n)$ , $\mathbf{U}(n)$ a $\mathbf{SU}(n)$ . . . . .	21
4.2 Geometrická interpretace násobení jednotkovým kvaternionem . . . . .	25
4.3 Rotace v $\mathbf{SO}(4)$ . . . . .	27
4.4 Rotace v $\mathbf{SO}(3)$ . . . . .	28
<b>5 Užití kvaternionů</b>	<b>31</b>
5.1 Rotace využívající kvaterniony . . . . .	31
5.2 Převod reprezentace osa-úhel do kvaternionů . . . . .	33
5.3 Různé využití kvaternionů v praxi . . . . .	35
<b>6 Závěr</b>	<b>39</b>
<b>Literatura</b>	<b>40</b>

## Přehled použitého značení

$q, \hat{q}, p$	kvaternion
$s$	skalární kvaternion (skalár)
$\mathbf{v}$	ryzí kvaternion
$\hat{\mathbf{v}}$	jednotkový ryzí kvaternion
$\mathbb{H}$	množina kvaternionů
$\mathbb{H}_1$	množina jednotkových kvaternionů
$\mathbb{H}_p$	množina ryzích kvaternionů
$\bar{q}$	kvaternion konjugovaný s kvaternionem $q$
$q^{-1}$	inverzní kvaternion ke kvaternionu $q$
$\ q\ $	norma kvaternionu $q$
$\mathbf{GL}(n, F)$	obecná lineární grupa
$\mathbf{O}(n)$	ortogonální grupa
$\mathbf{U}(n)$	unitární grupa
$\mathbf{SO}(n)$	speciální ortogonální grupa
$\mathbf{SU}(n)$	speciální unitární grupa
$\mathbf{GO}(n)$	hlavní ortogonální grupa
$S^{n-1}$	sféra v $n$ -rozměrném prostoru
$\mathbb{R}P^n$	$n$ -rozměrný reálný projektivní prostor
$\mathbb{C}$	obor komplexních čísel
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$F$	těleso
$A, \hat{A}, B, H$	matice
$\mathbf{b}, \mathbf{w}, \mathbf{e}, \mathbf{r}$	vektor
$I$	jednotková matice
$\gamma, T$	zobrazení
$\varrho, R$	rotace
$\theta, \varphi$	úhel otočení
$(1, \hat{\mathbf{v}}), (1, \hat{\mathbf{v}})^\perp, P$	rovina



# 1 Úvod

Kvaterniony jsou zobecněním komplexních čísel v trojrozměrném prostoru. U zrodu kvaternionů stál Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Nalezl vztah pro násobení čtyř základních jednotek, našel řešení ve formě  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ . Přišel na to, že je zapotřebí zavést jednu reálnou a tři imaginární složky, aby byla správně vytvořena algebra kvaternionů. Kvaternion  $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$  lze zapsat jako uspořádanou čtveřici  $(s, (x, y, z))$ . Častěji však bývá zapisován ve zkráceném tvaru  $(s, \mathbf{v})$ . Kde  $s$  je skalár a  $\mathbf{v}$  je chápán jako vektor v trojrozměrném prostoru (viz [8]).

Pokud násobíme dva skalární kvaterniony (kvaterniony, které mají vektorovou složku nulovou, tj. skaláry) dostaneme opět skalár a pokud násobíme ryzí (kvaternion s nulovou skalární částí) a skalární kvaternion dostaneme skalární násobek ryzího kvaternionu. Jestliže budeme násobit dva ryzí kvaterniony  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  dostaneme kvaternion, jehož skalární část je záporně vzatý skalární součin  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  vektorů  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  a vektorová část je rovna vektorovému součinu  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  těchto dvou vektorů (viz Věta 3.2). Jak uvidíme, násobení kvaternionů úzce souvisí s rotacemi ve čtyřrozměrném a trojrozměrném prostoru.

Násobení kvaternionů není komutativní, ale je asociativní a oboustranně distributivní vzhledem ke sčítání, existuje jednotkový prvek a ke každému nenulovému kvaternionu existuje kvaternion inverzní a konjugovaný. Kvaterniony tvoří nekomutativní těleso. Je to obor čtyřsložkových čísel, který obsahuje obor čísel komplexních. To znamená, že komutativní těleso komplexních čísel je podtělesem nekomutativního tělesa kvaternionů.

Jednotkový kvaternion  $\|q\| = 1$  je významný pro počítačovou grafiku, tento kvaternion se dá zapsat jako  $q = (\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)$ , kde  $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$ . Kvaternion popisuje rotaci v trojrozměrném prostoru, a to rotaci kolem jednotkového vektoru  $\hat{\mathbf{v}}$  o úhel  $2\theta$  (viz [1]).

Reprezentace rotace v  $\mathbb{R}^3$  s využitím kvaternionů je jednoduchá. Prostor  $\mathbb{R}^2$  představuje euklidovský prostor dimenze 2 a obdobně prostory  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$  představují euklidovské prostory dimenze 3 a 4. Je numericky stabilnější než reprezentace tvořená ortogonálními maticemi. Grupa rotací  $\mathbf{SO}(2)$  je tzv. speciální ortogonální grupa reálných matic typu  $2 \times 2$ , je izomorfní k  $\mathbf{U}(1)$ , což je grupa jednotkových komplexních čísel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , neboť

$$e^{i\varphi} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

je izomorfismus. Všimněme si, že  $\mathbf{U}(1)$  je homeomorfní s kružnicí  $S^1$ . Nyní ztotožníme rovinu  $\mathbb{R}^2$  s komplexní rovinou  $\mathbb{C}$ , nechť  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Pak každá rovinná rotace  $R_\varphi$  se středem v počátku o úhel  $\varphi$  je reprezentována komplexním číslem  $e^{i\varphi} \in \mathbf{U}(1)$ , pro všechna  $z, \hat{z} \in \mathbb{C}$ ,

$$\hat{z} = R_\varphi(z) \quad \hat{z} = e^{i\varphi}z.$$

Kvaterniony zobecňují komplexní čísla tak, že rotace  $\mathbb{R}^3$  je reprezentována násobením jednotkových kvaternionů.

Násobení kvaternionů není komutativní a rotace z  $\mathbf{SO}(3)$  vyžaduje konjugaci kvaternionů. Místo kružnice  $S^1$  bereme v úvahu sféru  $S^3$  v prostoru  $\mathbb{R}^4$ , grupa  $\mathbf{U}(1)$  je nahrazena grupou  $\mathbf{SU}(2)$ .

Grupa  $\mathbf{SO}(3)$  ztotožněná s rotací v  $\mathbb{R}^3$  detailněji souvisí se sférou  $S^3$  a s reálným projekčním prostorem  $\mathbb{R}P^3$ . Rotaci z  $\mathbb{R}^3$  vystihují velmi přesně právě kvaterniony.

Nyní máme základní představu o tom, co jsou kvaterniony a k čemu nám mohou posloužit. V následujícím textu uvedeme historické souvislosti s objevem kvaternionů a zmíníme se o oktonionech, které jsou dalším zobecněním kvaternionů. Zavedeme kvaterniony a jejich základní vlastnosti, které budeme dále využívat. Pokusíme se ukázat, že kvaternion popisuje rotaci v trojrozměrném prostoru. Následně využijeme kvaternionů při řešení geometrických úloh a na závěr se zmíníme o různých způsobech využití kvaternionů.

## 2 Historie kvaternionů

### 2.1 Historie komplexních čísel

Komplexní čísla se poprvé objevila v 16. století při řešení algebraických rovnic v pracích italských matematiků. V 17. a 18. století se začalo užívat termínu „imaginární číslo“ a právě komplexními čísly se začali zabývat matematikové jako například Abraham de Moivre (1667–1754), Leonhard Euler (1707–1783), který zavedl symbol  $i$  pro  $\sqrt{-1}$ , Johann Bernoulli (1667–1748) a další. Koncem 18. století se komplexní čísla již hojně užívala v matematické analýze, hydrodynamice nebo kartografii. Přesto však nebylo stále jasné jak chápat prvek  $\sqrt{-1}$  a jak si představit komplexní číslo. Euler chápal komplexní číslo  $x + iy$  jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi  $(x, y)$ . Pomocí polárních souřadnic vyjadřoval komplexní číslo v goniometrickém tvaru  $x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Na přelomu 18. a 19. století dospěl Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny. Rovina komplexních čísel byla proto v 19. století nazvána Gaussovou rovinou.

Sčítání a násobení komplexních čísel je dáno těmito rovnostmi

$$\begin{aligned}x + iy + \hat{x} + i\hat{y} &= (x + \hat{x}) + i(y + \hat{y}), \\(x + iy)(\hat{x} + i\hat{y}) &= (x\hat{x} - y\hat{y}) + i(x\hat{y} + y\hat{x}),\end{aligned}$$

případně v goniometrickém tvaru

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\hat{r}(\cos \hat{\varphi} + i \sin \hat{\varphi}) = r\hat{r}[\cos(\varphi + \hat{\varphi}) + i \sin(\varphi + \hat{\varphi})].$$

Komplexní číslo  $x + yi$  je v rovině kartézských souřadnic znázorněno bodem  $M = [x, y]$ , nebo vektorem  $\overrightarrow{OM}$  s počátečním bodem  $O$  a koncovým bodem  $M$ . Sčítání komplexních čí-

sel odpovídá sčítání vektorů a násobení komplexních čísel představuje složení rotace (kolem počátku) a stejnolehlosti (se středem v počátku).

## 2.2 Rozšiřování oboru komplexních čísel

Způsob jakým byla komplexní čísla vytvořena a také jejich geometrické interpretace vedly k dalším pokusům o rozšiřování oboru komplexních čísel na „větší“ číselný obor. Těmto vícesložkovým číslům ze později začalo říkat hyperkomplexní čísla.

Začaly se studovat formální výrazy typu

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n,$$

kde  $n$  bylo zvolené přirozené číslo,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  byla reálná čísla a  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  nové základní jednotky. Dnes ovšem víme, že systém hyperkomplexních čísel lze vytvořit pouze pro  $n = 1, 2, 4, 8$ , což dokázal německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919) roku 1898 viz [13]. Tedy reálné alternativní algebry s dělením konečné dimenze existují právě čtyři. Tomuto tvrzení se také říká zobecněná Frobeniova věta. Přičemž pokud  $n = 1$  jde o reálná čísla a tedy i o komutativní asociativní algebru a pokud  $n = 2$  jde o komplexní čísla a komutativní asociativní algebru. Jestliže  $n = 4$  jedná se o nekomutativní asociativní algebru, tedy kvaterniony a nakonec  $n = 8$  oktoniony jsou nekomutativní, neasociativní a alternativní algebrou. Algebra  $A$  je alternativní, jestliže platí následující vztahy  $(xx)y = x(xy)$  a  $y(xx) = (yx)x$  pro všechna  $x, y \in A$ . Dále existuje ještě nekonečně mnoho algeber, které nejsou ani alternativní (jejich popis není ještě zcela znám).

Sčítání výše uvedených výrazů však bylo definováno po složkách a mělo vlastnosti jako je asociativita, komutativita, existence nulového prvku a existence opačného prvku. Na násobení se kladly požadavky jako je asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku a existence inverzního prvku, které nalezení vhodných vzorců pro násobení samozřejmě komplikovalo.

Právě těmito problémy se začali zabývat Hamilton, Arthur Cayley (1821–1895), Augustus de Morgan (1806–1871), bratři Gravesovi a další. Snažili se najít nový číselný obor (alespoň trojsložkových čísel), který by rozšiřoval obor komplexních čísel. Násobení mělo být asociativní a komutativní a měla být zaručena existence jednotkového prvku a ke každému nenulovému prvku prvek inverzní. Výsledná struktura měla být komutativním tělesem.

Hamilton se několik let pokoušel nalézt obor čísel, která by rozšiřovala již známý obor komplexních čísel. Zaměřil se na trojsložková čísla, ale jeho snažení bylo marné. Při hledání vzorce pro násobení trojsložkových čísel mu vycházely struktury, které obsahovaly netriviální dělitele nuly (tj. nenulové prvky, jejichž součin je roven nule). Jak později napsal svému synovi: „Každé ráno u snídaně jste se mě ty a tvůj malý bratr William Edwin ptali, jestli už umím násobit trojice. A já vám vždy říkal se smutnou tváří, že je umím pouze sčítat.“ Nakonec se rozhodl řešit tento problém pro čtyřsložková čísla, která nazval kvaterniony. Historika praví, že když šel 16. října 1843 po Broughamském mostu přes Royal

Canal v Dublinu na zasedání Královské akademie věd, napadl ho vzorec pro násobení základních jednotek. Hamilton pak tento vzorec vyryl kapesním nožem do Broughamského mostu (viz [3]). A toto místo dodnes připomíná deska s nápisem :

Here as walked by  
on the 16th October 1843  
Sir William Rowan Hamilton  
in a flash of genius discovered  
the fundamental formula for  
quaternion multiplication  
 $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$   
& cut it on a stone of this bridge.

Kvaterniony jsou tedy oborem hyperkomplexních čísel, která jsou nejbližší číslům komplexním. Hamilton věnoval kvaternionům zbytek života a napsal o nich dvě monografie. Ovšem význam kvaternionů se významu komplexních čísel nikdy nevyrovnal, (podrobněji v [12], [11]).

### 2.3 Oktoniony

O svém objevu kvaternionů napsal Hamilton již v roce 1843 svému příteli J. T. Gravesovi. Graves byl jeho objevem inspirován a v prosinci 1843 našel systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami. Nezávisle na Gravesovi našel stejný obor i Cayley. Tento nový obor se nazývá oktoniony nebo se užívá termínů Cayleyova čísla či Gravesova–Cayleyova čísla (viz [11]). Jedná se o čísla zapsaná ve tvaru

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + e\mathbf{l} + f\mathbf{m} + g\mathbf{n} + h\mathbf{o},$$

kde  $a, b, \dots, h$  jsou reálná čísla a  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \dots, \mathbf{o}$  jsou základní jednotky, které se násobí pomocí rovností

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = \mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{o}^2 = -1,$$

kde platí

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{il} &= -\mathbf{li} = \mathbf{m}, \\ \mathbf{lj} &= -\mathbf{jl} = \mathbf{n}, \\ \mathbf{kl} &= -\mathbf{lk} = \mathbf{o} \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Násobení oktonionů je nekomutativní a neasociativní, ale je alternativní viz [14].

## 3 Algebra kvaternionů

### 3.1 Úvodní pojmy

**Definice 3.1** Necht  $i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1$ ,  $ij = k$  a  $ji = -k$ . **Kvaternion**  $q$  můžeme napsat jako

$$\begin{aligned} q &= [s, \mathbf{v}], \quad s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\ &= [s, (x, y, z)], \quad s, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &= s + i\mathbf{x} + j\mathbf{y} + k\mathbf{z}, \quad s, x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Poznámka 3.1** Z výše uvedených vztahů a za předpokladu asociativity násobení se určí tabulka pro násobení čtyř základních jednotek  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ —viz Tabulka 2.  $\square$

$\cdot$	$1$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$1$	$1$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-1$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-1$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-1$

Tabulka 2: Vztahy mezi  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

**Definice 3.2** Množina kvaternionů je značena  $\mathbb{H}$ .

V různých zdrojích existuje několik dalších způsobů, jak zavést kvaterniony (viz [2]). Například můžeme kvaterniony nadefinovat jako určitou komplexní matici typu  $2 \times 2$ . Komplexní číslo  $z$  napíšeme jako  $z = a + ib$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a vytvoříme k němu číslo komplexně sdružené  $\bar{z}$ ,  $\bar{z} = a - bi$ .

Potom  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  jsou chápána jako matice

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kombinací těchto matic vytvoříme množinu  $\mathbb{H}$ ,  $s\mathbf{1} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , kde  $(s, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ . Každou matici v množině  $\mathbb{H}$  (tj. každý kvaternion) můžeme pak zapsat takto

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

kde  $a = s + ix$  a  $b = y + iz$ . Taková komplexní matice  $A$  reprezentuje kvaternion  $s + i\mathbf{x} + j\mathbf{y} + k\mathbf{z}$ .

Kvaternion může být reprezentován také jako reálná matice typu  $4 \times 4$  viz [8].

Pro  $s, x, y, z \in \mathbb{R}$  je následující maticí

$$B = \begin{pmatrix} s & -x & z & -y \\ x & s & -y & -z \\ -z & y & s & -x \\ y & z & x & s \end{pmatrix}$$

reprezentován kvaternion  $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ .

Maticová reprezentace kvaternionů má některé další vlastnosti, které nebudeme uvádět, podrobnější informace naleznete v [8].

Kvaterniony  $\mathbb{H}$  jsou velmi často definovány jako reálná algebra, která je tvořena čtyřmi částmi  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

### 3.2 Základní vlastnosti

**Definice 3.3** *Nechť  $q \in \mathbb{H}$ . Pokud  $q = [s, \mathbf{v}]$ , kde  $s = 0$ , pak  $q$  se nazývá **ryzí kvaternion**. Množina **ryzích kvaternionů** je značena  $\mathbb{H}_p$ .*

**Definice 3.4** *Nechť  $q \in \mathbb{H}$ . Pak kvaternion  $\bar{q}$  nazýváme **konjugovaným kvaternionem** s kvaternionem  $q$ , jestliže platí  $\bar{q} = \overline{[s, \mathbf{v}]} = [s, -\mathbf{v}]$ .*

Pokud je dán kvaternion  $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ , pak konjugovaný kvaternion  $\bar{q}$  má tvar

$$\bar{q} = s - \mathbf{i}x - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z. \quad (1)$$

**Definice 3.5** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = [s, (x, y, z)]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$ . Operaci **sčítání** definujeme následovně*

$$\begin{aligned} q + \hat{q} &= [s, \mathbf{v}] + [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= [s, (x, y, z)] + [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})] \\ &= (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) + (\hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}) \\ &= (s + \hat{s}) + (x + \hat{x})\mathbf{i} + (y + \hat{y})\mathbf{j} + (z + \hat{z})\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

**Věta 3.1** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = [s, \mathbf{v}]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}]$ . Pak můžeme napsat  $q + \hat{q} = [s + \hat{s}, \mathbf{v} + \hat{\mathbf{v}}]$ .*

*Důkaz 3.1* Důkaz je zřejmý. □

**Definice 3.6** *Nechť jsou dány kvaterniony  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ . **Odečítání** je definováno vztahem*

$$q - \hat{q} = q + (-1)\hat{q}. \quad (3)$$

**Definice 3.7** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$  a  $\hat{q} = \hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}$ . **Násobení** je definováno takto*

$$\begin{aligned} q\hat{q} &= [s, \mathbf{v}][\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= [s, (x, y, z)][\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})] \\ &= (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(\hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}) \\ &= s(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) + x\mathbf{i}(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) + y\mathbf{j}(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) + \\ &\quad z\mathbf{k}(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) \\ &= s\hat{s} - x\hat{x} - y\hat{y} - z\hat{z} + (s\hat{x} + \hat{s}x + y\hat{z} - \hat{y}z)\mathbf{i} + (s\hat{y} - x\hat{z} + \hat{s}y + \hat{x}z)\mathbf{j} \\ &\quad + (s\hat{z} + x\hat{y} - \hat{x}y + \hat{s}z)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Tento vztah byl před lety nezávisle na sobě popsán Hamiltonem a Rodriguesem. Také Olinde Rodrigues (1794–1851) pracoval s různými formulacemi, ale kvaterniony neobjevil. Nekomutativní násobení mezi dvěma kvaterniony se nazývá *Grassmannovo násobení*.

**Věta 3.2** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = [s, \mathbf{v}]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}]$ . Pak můžeme napsat*

$$q\hat{q} = [s\hat{s} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{v}} + \hat{s}\mathbf{v}], \quad (5)$$

kde  $\cdot$  znamená skalární násobení a  $\times$  vyjadřuje násobení vektorů v  $\mathbb{R}^3$ .

*Důkaz 3.2*

$$\begin{aligned} q\hat{q} &= [s, \mathbf{v}][\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(\hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}) \\ &= s\hat{s} - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) + \mathbf{i}(s\hat{x} + \hat{s}x + y\hat{z} - \hat{y}z) + \\ &\quad \mathbf{j}(s\hat{y} + \hat{s}y + z\hat{x} - x\hat{z}) + \mathbf{k}(s\hat{z} + \hat{s}z + x\hat{y} - y\hat{x}) \\ &= [s\hat{s} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{v}} + \hat{s}\mathbf{v}]. \quad \square \end{aligned}$$

Z důkazu 3.2 vidíme, že  $\Re(q\hat{q}) = \Re(\hat{q}q)$  a  $\Im(q\hat{q}) \neq \Im(\hat{q}q)$ , kde  $\Re(q\hat{q})$  ( $\Re(\hat{q}q)$ ) je skalární část kvaternionu, který vznikl násobením kvaternionu  $q$  kvaternionem  $\hat{q}$  zprava (zleva). Obdobně  $\Im$  značí vektorovou část kvaternionu.

Násobení kvaternionů se dá vyjádřit rovněž pomocí násobení matic (viz Poznámka 3.4).

**Poznámka 3.2**

1. Násobení kvaternionů není komutativní. Již z definice kvaternionů plyne  $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$  ale  $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$ . Násobení kvaternionů není ani antikomutativní, tedy neplatí vztah  $ab = -(ba)$ . Všimněme si, že  $\mathbf{li} = \mathbf{i}$ , ale  $-(\mathbf{i}l) = -\mathbf{i}$ .

2. Násobení kvaternionů je asociativní

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3),$$

pro všechna  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ .

3. Pokud  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ . Pak platí distributivita (levá i pravá) násobení vůči sčítání

$$\begin{aligned} q_1(q_2 + q_3) &= q_1q_2 + q_1q_3, \\ (q_2 + q_3)q_1 &= q_2q_1 + q_3q_1. \end{aligned}$$

□

Množina  $\mathbb{H}$  s operací sčítání a násobení je nekomutativní těleso, které se liší tím, že nemá vlastnost komutativního násobení (viz Poznámka 3.2).

**Věta 3.3** ( $\mathbb{H}, +, \cdot$ ) je nekomutativní těleso, kde platí

1. pro každá  $a, b \in \mathbb{H}$  platí, že  $a + b \in \mathbb{H}$  a

- a)  $a + b = b + a$
- b) pokud  $c \in \mathbb{H}$  pak  $a + (b + c) = (a + b) + c$

2. pro každá  $a, b \in \mathbb{H}$  platí, že  $ab \in \mathbb{H}$  a

- a) pokud  $c \in \mathbb{H}$  pak  $a(bc) = (ab)c$

3. pokud  $a, b, c \in \mathbb{H}$  pak

- a)  $a(b + c) = ab + ac$

4. existuje prvek  $0 \in \mathbb{H}$ , takový že

- a) pokud  $a \in \mathbb{H}$  pak  $a + 0 = a$
- b) pro každé  $a \in \mathbb{H}$  existuje opačný prvek  $-a \in \mathbb{H}$ , takový že  $(-a) + a = 0$

5. existuje prvek  $1 \in \mathbb{H}$ , takový že

- a) pokud  $a \in \mathbb{H}$  pak  $a1 = a1 = a$
- b) pro každý nenulový prvek  $a \in \mathbb{H}$  existuje inverzní prvek  $a^{-1} \in \mathbb{H}$ , takový že  $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ .



*Důkaz 3.3*

1. a) Důkaz je zřejmý, viz vztah (2).

b) Důkaz je zřejmý.

2. a) Víme, že násobení kvaternionů je asociativní (viz Poznámka (3.2) č. 2).

3. b) Víme, že platí distributivita (viz Poznámka (3.2) č. 3.)

4. a) Pokud vezmeme  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = [s, (x, y, z)]$ ,  $q \neq 0$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$ ,  $\hat{s} = \hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = 0$  pak podle vzorce (2), dostaneme  $[(s+0) + (x+0)\mathbf{i} + (y+0)\mathbf{j} + (z+0)\mathbf{k}] = [s, (x, y, z)]$ .

b) Pokud vezmeme  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = [s, (x, y, z)]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$ ,  $\hat{s} = -s$ ,  $\hat{x} = -x$ ,  $\hat{y} = -y$ ,  $\hat{z} = -z$  tedy  $\hat{q} = -q$ , pak podle vzorce (2) dostaneme  $q + \hat{q} = [(s-s) + (x-x)\mathbf{i} + (y-y)\mathbf{j} + (z-z)\mathbf{k}] = 0$ .

5. a) Pokud vezmeme  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ , kde  $q = [s, \mathbf{v}]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, (\hat{\mathbf{v}})]$ ,  $\hat{s} = 1$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = 0$  tedy  $\hat{q} = 1$ , pak podle vzorce (5) dostaneme  $q\hat{q} = [s1 - \mathbf{v}0, \mathbf{v} \times 0 + s0 + 1\mathbf{v}] = [s, \mathbf{v}] = q$ . Pro  $\hat{q}q$  je postup analogický.

b) Viz Věta 3.5. □

**Definice 3.8** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ ,  $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]]$ . **Skalární součin** dvou kvaternionů vypočítáme jako*

$$q \cdot \hat{q} = s\hat{s} + x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \quad (6)$$

**Definice 3.9** *Nechť  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$ . **Normu**  $q$  budeme označovat  $\|q\|$ , ta je dána vztahem*

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q\bar{q}}, \quad (7)$$

tedy

$$\|q\|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = s^2 + \|\mathbf{v}\|^2, \quad \|q\| \geq 0.$$

Norma  $\|q\|^2 = 0$  jen tehdy, pokud  $s = x = y = z = 0$ , tedy

$$\|q\|^2 = 0 \Leftrightarrow q = 0.$$

**Poznámka 3.3** V jiné literatuře (viz [2]) je výraz  $s^2 + x^2 + y^2 + z^2$  označován  $N(q)$  a nazývá se *redukovaná norma kvaternionu*  $q$ . □

**Poznámka 3.4** Nyní můžeme vyjádřit násobení kvaternionů pomocí násobení matic. Protože násobení kvaternionů je bilineární (viz Poznámka 3.2 č. 3), je pro pevné  $p$  zobrazení

$q \mapsto pq$  lineární a také pro dané  $q$  je zobrazení  $p \mapsto pq$  lineární. Matici prvního zobrazení budeme značit  $L_p$  a matice druhého zobrazení  $R_q$ , pak

$$pq = L_p q = \begin{pmatrix} s & -x & -y & -z \\ x & s & -z & y \\ y & z & s & -x \\ z & -y & x & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix},$$

$$pq = R_q p = \begin{pmatrix} \hat{s} & -\hat{x} & -\hat{y} & -\hat{z} \\ \hat{x} & \hat{s} & \hat{z} & -\hat{y} \\ \hat{y} & -\hat{z} & \hat{s} & \hat{x} \\ \hat{z} & \hat{y} & -\hat{x} & \hat{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Řádky a sloupce těchto matic jsou ortogonální. Takže pokud  $p$  a  $q$  jsou jednotkové kvaterniony, matice  $R_q$  a  $L_p$  jsou ortogonální.

Nyní jednoduše ukážeme, že  $R_{\bar{q}} = R_q^T$ . Na základě Definice 3.4 platí, že  $q = [s, (x, y, z)]$  a  $\bar{q} = [s, (-x, -y, -z)]$  potom matice  $R_{\bar{q}}$  vypadá následovně

$$R_{\bar{q}} = \begin{pmatrix} s & x & y & z \\ -x & s & -z & y \\ -y & z & s & -x \\ -z & -y & x & s \end{pmatrix}.$$

Víme, že matice  $R_q$  nabývá tvaru

$$R_q = \begin{pmatrix} s & -x & -y & -z \\ x & s & z & -y \\ y & -z & s & x \\ z & y & -x & s \end{pmatrix}.$$

Jestliže tuto matici transponujeme, získáme matici  $R_{\bar{q}}$ , takže rovnost  $R_{\bar{q}} = R_q^T$  platí.

Navíc je zřejmé, že platí také  $L_{\bar{p}} = L_p^T$ . Jak víme, platí  $\|p\|^2 = p\bar{p}$ , matice  $L_p L_p^T = \|p\|^2 I$  (kde  $I$  je jednotková matice  $4 \times 4$ ). Analogicky vztah platí i pro  $R_q R_q^T$ . Protože  $\det(L_p) = \det(L_p^T)$  snadno můžeme nahlédnout, že  $\det(L_p)^2 = \|p\|^8$  a proto  $\det(L_p) = \pm \|p\|^4$ . Je vidět, že jeden z členů determinantu  $L_p$  je  $s^4$  a proto

$$\det(L_p) = (s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Zřejmě, pokud je  $p$  jednotkový kvaternion (viz Definice 3.11), pak matice  $L_p \in \mathbf{SO}(3)$  (o  $\mathbf{SO}(3)$  viz kap. 4.1) a popisuje rotaci a naopak pokud  $q$  je jednotkový kvaternion, pak je  $R_q$  rotační matice.

**Definice 3.10** *Zobrazení  $\gamma : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  je definováno takto*

$$\gamma(q\hat{q}) = s\hat{s} + x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Vidíme, že zobrazení  $\gamma$  je bilineární, symetrické a pozitivně definitní. Proto kvaterniony tvoří euklidovský prostor se skalárním součinem  $\gamma(q\hat{q})$  (viz Definice 3.8).  $\square$

**Věta 3.4** *Nechť  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ . Pak platí*

$$q_1 \overline{q_1} = \|q_1\|^2, \quad (8)$$

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}, \quad (9)$$

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|. \quad (10)$$

*Důkaz 3.4*

1. Máme  $q_1 = [s_1, \mathbf{v}_1]$  a  $\overline{q_1} = [s_1, -\mathbf{v}_1]$ . Můžeme vypočítat

$$q_1 \overline{q_1} = (s_1 + \mathbf{v}_1)(s_1 - \mathbf{v}_1) = s_1^2 + \mathbf{v}_1^2 = \|q_1\|^2 = \overline{q_1} q_1.$$

2. Spočítáme výrazy na obou stranách :

$$\begin{aligned} \overline{q_1 q_2} &= s_1 s_2 - s_1 \mathbf{v}_2 - s_2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \\ \overline{q_2 q_1} &= (s_2 - \mathbf{v}_2)(s_1 - \mathbf{v}_1) \\ &= s_2 s_1 - s_2 \mathbf{v}_1 - s_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 \\ &= \overline{q_1 q_2}. \end{aligned}$$

Tedy  $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$  a  $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ .

$$\begin{aligned} 3. \quad \|q_1 q_2\|^2 &= (q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2}) \\ &= q_1 q_2 \overline{q_2} \overline{q_1} \\ &= \|q_1\|^2 \|q_2\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

**Definice 3.11** *Nechť  $q \in \mathbb{H}$ . Pokud*

$$\|q\| = 1, \quad (11)$$

*pak  $q$  se nazývá jednotkový kvaternion. Množinu jednotkových kvaternionů budeme označovat  $\mathbb{H}_1$ .*

**Věta 3.5** *Nechť  $q \in \mathbb{H}$ ,  $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)] \neq 0$ . Pak existuje jediný inverzní kvaternion takový, že  $q q^{-1} = q^{-1} q = 1$  a platí*

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}. \quad (12)$$

*Důkaz 3.5* Důkaz provedeme sporem. Nechť existují  $a_1, a_2 \in \mathbb{H}$  dva různé kvaterniony inverzní k  $q$ . To znamená, že

$$a_1 = a_1 1 = a_1 (q a_2) = (a_1 q) a_2 = 1 a_2 = a_2.$$

Jak vidíme  $a_1 = a_2$  a proto existuje pouze jediný inverzní kvaternion ke kvaternionu  $q$ .

Vycházíme z předpokladu, že  $a = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ . Pak platí

$$\begin{aligned} qa &= q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1, \\ aq &= \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} q = \frac{\bar{q}q}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1. \end{aligned}$$

□

**Věta 3.6** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}_1$ . Platí tyto vztahy*

$$\|q\hat{q}\| = 1, \quad (13)$$

$$q^{-1} = \bar{q}. \quad (14)$$

*Důkaz 3.6* Využijeme vztahu (10)

$$\begin{aligned} \|q\hat{q}\| &= \|q\| \|\hat{q}\| = 1 \quad \text{neboť} \quad \|q\| = \|\hat{q}\| = 1, \\ q^{-1} &= \frac{1}{q} = \frac{1\hat{q}}{q\hat{q}} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \bar{q} \quad \text{neboť} \quad \|q\| = 1. \end{aligned}$$

□

**Definice 3.12** *Nechť  $q, \hat{q} \in \mathbb{R}$ ,  $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$  a  $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]]$ . Pak **vektorový součin** dvou kvaternionů vypočítáme jako*

$$\begin{aligned} q \times \hat{q} &= \frac{q\hat{q} - \hat{q}q}{2} \\ &= (y\hat{z} - z\hat{x})\mathbf{i} + (z\hat{x} - x\hat{z})\mathbf{j} + (x\hat{y} - y\hat{x})\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (15)$$

**Definice 3.13** *Kvaterniony  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$  nazýváme **ortogonální**, jestliže platí*

$$q \cdot \hat{q} = 0. \quad (16)$$

**Poznámka 3.5**

1. Dva jednotkové ortogonální kvaterniony nazýváme ortonormální.

2. Násobení dvou na sebe kolmých kvaternionů  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}_p$  vypadá takto  $q\hat{q} = q \times \hat{q}$ . □

**Definice 3.14** *Kvaterniony  $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$  nazýváme **rovnoběžné**, jestliže platí*

$$q \times \hat{q} = 0. \quad (17)$$

**Věta 3.7** *Nechť  $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}_1$ . Pak existuje jednotkový vektor  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$  a úhel  $\theta$  z intervalu  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  takové, že*

$$q = [\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta]. \quad (18)$$

*Důkaz 3.7* Pokud  $q = [1, \mathbf{0}]$ , položíme  $\theta = 0$  a  $\hat{\mathbf{v}}$  bude libovolně vybrán z jednotkových vektorů v  $\mathbb{R}^3$ .

Pokud  $q \neq [1, \mathbf{0}]$ ,  $a = |\mathbf{v}|$  a  $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{a}\mathbf{v}$ . Pak  $\mathbf{v} = a\hat{\mathbf{v}}$ , kde  $\hat{\mathbf{v}}$  je jednotkový vektor v  $\mathbb{R}^3$ . Protože  $q$  je jednotkový kvaternion, dostaneme  $1 = \|q\|^2 = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = s^2 + a^2\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = s^2 + a^2$ . Jak vidíme rovnice  $s^2 + a^2 = 1$  popisuje kružnici v rovině. Protože tuto kružnici můžeme popsat také rovnicí  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , pak existuje  $\theta \in \langle \pi, -\pi \rangle$  takové, že  $s = \cos \theta$  a  $a = \sin \theta$ . Dostaneme tedy

$$q = [s, \mathbf{v}] = [s, a\hat{\mathbf{v}}] = [\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta]. \quad \square$$

### **Poznámka 3.6**

1. Pokud kvaterniony  $q$  a  $\hat{q}$  jsou jednotkové kvaterniony, pak i  $q\hat{q}$  a  $\hat{q}q$  jsou jednotkové kvaterniony.

2. Inverzní kvaternion  $q^{-1}$  jednotkového kvaternionu  $q$  je také jednotkový kvaternion.

V této kapitole jsme shrnuli základní vlastnosti kvaternionů, které jsou nutné k popisu v další části textu. Kvaterniony mají i jiné důležité vlastnosti, kterými se v tomto textu nebudeme zabývat (např. kvaterniony a exponenciální funkce nebo diferenciální počet atd.), protože nejsou hlavním cílem. Více o zmíněných vlastnostech naleznete v [10].  $\square$

## **4 Kvaterniony a rotace v $\mathbf{SO}(4)$ a $\mathbf{SO}(3)$**

Rotace kolem osy v trojrozměrném prostoru může být definována několika způsoby. Například použitím Eulerova teorému, který říká, že libovolnou rotaci kolem osy v trojrozměrném prostoru lze popsat třemi proměnnými. Tyto proměnné jsou známé jako Eulerovy úhly (viz [6]). My se budeme zabývat rotací, která je vyjádřena kvaterniony. Rotace je daná osou a orientovaným úhlem (ten má velikost a smysl), které můžeme vzít právě z kvaternionové reprezentace (viz Věta 4.16).

### **4.1 Grupy $\mathbf{O}(n)$ , $\mathbf{SO}(n)$ , $\mathbf{U}(n)$ a $\mathbf{SU}(n)$**

Budeme vycházet z obecné lineární grupy (grupa je algebraická struktura s jednou operací), kterou označíme  $\mathbf{GL}(n, F)$ , kde  $F$  je těleso  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Jde o grupu regulárních matic  $n \times n$  nad tělesem  $F$  s operací běžného maticového násobení.

**Definice 4.1** *Reálná matice typu  $n \times n$  se nazývá **ortogonální**, pokud  $A^{-1} = A^T$ . Tyto matice tvoří podgrupu grupy  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , značíme ji  $\mathbf{O}(n)$  a nazýváme **ortogonální grupa**. Tedy*

$$\mathbf{O}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\}.$$

**Poznámka 4.1**

1. Determinant ortogonální matice je  $\pm 1$ . Vycházíme z rovnosti  $A^T A = I$  odkud plyne  $(\det A)^2 = (\det A^T)(\det A) = \det I = 1$ .
2. *Hlavní ortogonální grupa*  $\mathbf{GO}(n)$  obsahuje všechny ortogonální matice typu  $n \times n$ .  $\square$

**Definice 4.2** *Ortogonální matice, které mají determinant 1 tvoří podgrupu, kterou nazýváme **speciální ortogonální grupa** a značíme ji  $\mathbf{SO}(n)$ . Tedy*

$$\mathbf{SO}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I \wedge \det A = 1\}.$$

$\mathbf{SO}(3)$  je grupou ortogonální grupy  $\mathbf{O}(3)$  a  $\mathbf{SO}(4)$  je grupou ortogonální grupy  $\mathbf{O}(4)$  (viz [5]).

**Definice 4.3** *Komplexní matice typu  $n \times n$  se nazývá **unitární**, pokud splňuje podmínku  $AA = I$ , kde  $I$  je jednotková matice. Tyto matice budou zřejmě tvořit podgrupu grupy  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ . Tuto podgrupu budeme značit  $\mathbf{U}(n)$  a nazveme ji **unitární grupa**.*

$$\mathbf{U}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid AA = I\}.$$

**Definice 4.4** *Unitární matice, které mají determinant 1, tvoří podgrupu, kterou nazýváme **speciální unitární grupa** a značíme ji  $\mathbf{SU}(n)$ . Tedy*

$$\mathbf{SU}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid AA = I \wedge \det A = 1\}.$$

**Věta 4.1** *Je-li  $A$  reálná matice typu  $n \times n$ , pak následující výrazy jsou ekvivalentní.*

- a) *Matice  $A$  je ortogonální.*
- b) *Násobení matice  $A$  zachovává skalární součin, tzn.  $(AX \cdot AY) = (X \cdot Y)$  pro všechna  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .*
- c) *Sloupce matice  $A$  jsou ortonormální vektory.*

*Důkaz 4.1* Důkaz můžeme nalézt např. v [15].  $\square$

*Ortogonálním operátorem* nazýváme násobení zleva ortogonální maticí. Ortogonální operátor je takový, který zachovává skalární součin.

**Definice 4.5** *Zobrazení  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazýváme **izometrií**, jestliže platí*

$$|T(p)| = |p|,$$

*pro všechna  $p \in \mathbb{R}^n$ .*

**Poznámka 4.2** Součin dvou izometrií je také izometrie.  $\square$

**Věta 4.2** *Nechť  $T$  je zobrazení  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

- a)  $T$  je izometrie, která fixuje počátek.
- b)  $T$  zachovává skalární součin, tj.  $(T(X) \cdot T(Y)) = (X \cdot Y)$  pro všechna  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .
- c)  $T$  je ortogonální operátor.

*Důkaz 4.2* Důkaz lze najít např. v [16].  $\square$

**Věta 4.3** *Každá izometrie  $T$  je složení izometrie fixující počátek a translace. To znamená, že ji můžeme zapsat ve tvaru  $T(X) = AX + \mathbf{b}$ , kde  $A$  je ortogonální matice a  $\mathbf{b}$  je vektor.*

*Důkaz 4.3* Nejdříve připomeneme, že pro nějaký pevný vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  je translace o  $\mathbf{b}$  zobrazení  $t(X) = X + \mathbf{b}$ .

Nechť  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je izometrie. Nechť  $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je translace  $t(X) = X + T(0)$ . Pak  $T = t \cdot t^{-1}T$ , kde  $(t^{-1}T)(0) = t^{-1}(T(0)) = T(0) - T(0) = 0$ . Což dokazuje, že  $T$  je složené z translace a izometrie fixující počátek.  $\square$

Připomeňme, že determinant ortogonální matice je  $\pm 1$  (viz Poznámka 4.1). Říkáme, že lineární operátor *zachovává orientaci*, pokud je determinant příslušné matice 1 a naopak pokud je determinant  $-1$  říkáme, že *obrací orientaci*. Izometrii budeme nazývat *přemístěním*, pokud bude zachovávat orientaci.

**Věta 4.4** *Každá matice  $A \in \mathbf{SO}(3)$  má vlastní číslo 1.*

*Důkaz 4.4* Tuto větu dokážeme důkazem rovnosti  $\det(A - I) = 0$ . Víme, že  $\det A = \det A^T$  a proto  $\det A^T = 1$ . Protože  $A$  je ortogonální dostáváme rovnost  $A^T(A - I) = (I - A)^T$  a

$$\det(A - I) = \det A^T(A - I) = \det(I - A)^T = \det(I - A). \quad (19)$$

Pro libovolnou matici  $B$  typu  $3 \times 3$  platí,  $\det(-B) = -\det(B)$ . Z rovnosti (19) plyne, že  $\det(A - I) = 0$ .  $\square$

**Věta 4.5** *Matice  $A$  popisuje rotaci v  $\mathbb{R}^2$  kolem počátku, resp. v  $\mathbb{R}^3$  kolem osy procházející počátkem, právě když  $A \in \mathbf{SO}(2)$ , resp.  $\mathbf{SO}(3)$*

*Důkaz 4.5* Tuto rotaci označíme  $\varrho$ , je to přemístění, které fixuje počátek. Podle Věty 4.2 můžeme zapsat rotaci  $\varrho$  jako násobení ortogonální maticí  $A$ . Jak víme determinant ortogonálních matic je  $\det A = \pm 1$ , který se mění spojitě s úhlem rotace. Vzhledem k tomu,

že rotaci, která se otáčí o nulový úhel odpovídá jednotková matice, jenž má determinant 1, je vidět, že  $A \in \mathbf{SO}(2)$  resp.  $A \in \mathbf{SO}(3)$ .

Nechť naopak matice  $A \in \mathbf{SO}(2)$  je ortogonální  $2 \times 2$  matice s determinantem 1. Označme  $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{e}_1$  první sloupec matice  $A$ . Vzhledem k tomu, že  $A$  je ortogonální, tak vektor  $\mathbf{w}_1$  je jednotkový. Potom existuje i taková rotace  $R$ , že  $R\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1$ . Následně  $B = R^{-1}$  fixuje  $\mathbf{e}_1$ . Protože  $A$  i  $R$  jsou matice v  $\mathbf{SO}(2)$  je i  $B$  elementem  $\mathbf{SO}(2)$ . To znamená, že  $B$  tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{R}^2$  a první sloupec je  $\mathbf{e}_1$ . Druhý sloupec musí být roven  $\mathbf{e}_2$  nebo  $-\mathbf{e}_2$ . Ovšem druhý případ můžeme vyloučit, protože  $\det B = 1$ . Tedy  $B = I$  a vzhledem k tomu, že  $A = R$ , tak  $A$  reprezentuje rotaci.

Nyní dokážeme, že  $A \in \mathbf{SO}(3)$  reprezentuje rotaci a připomeneme vlastnosti těchto rotací.

- a)  $\rho$  je přemístění, které fixuje počátek.
- b)  $\rho$  fixuje nenulový vektor  $\mathbf{w}$ .
- c)  $\rho$  se chová jako rotace v rovině  $P$  kolmé k  $\mathbf{w}$ .

Nyní přecházející část dokážeme.

- a) Viz Věta 4.2.
- b) Každá matice  $A \in \mathbf{SO}(3)$  má vlastní číslo 1 viz Věta 4.4. Pro vlastní vektor, jenž přísluší tomuto vlastnímu číslu platí  $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$ . Hledaným vektorem je tedy  $\mathbf{w}$ .
- c) Nechť  $\mathbf{w}_1$  je normovaný vektor  $\mathbf{w}$ . Nalezneme ortonormální vektory  $\mathbf{w}_2$  a  $\mathbf{w}_3$ , které leží v rovině  $P$ , jenž je kolmá na  $\mathbf{w}_1$ . Potom  $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$  je ortonormální báze prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Matice  $H = [B]^{-1}$  je také ortogonální, protože  $[B]$  je ortogonální a  $\hat{A} = PAP^{-1}$ , reprezentuje stejný operátor jako  $A$ , ale v bázi  $B$ . Víme, že matice  $H$  i  $A$  jsou ortogonální a proto je ortogonální i  $\hat{A}$  a platí  $\det(\hat{A}) = \det H \cdot \det A \cdot \det H^{-1} = 1$ . Matice  $\hat{A} \in \mathbf{SO}(3)$ .

Protože  $\mathbf{w}_1$  je vlastní vektor, který přísluší 1, je první sloupec  $\hat{A}$   $\mathbf{e}_1$ . Vzhledem k tomu, že  $\hat{A}$  je ortogonální, musejí být ostatní sloupce také ortogonální k  $\mathbf{e}_1$  a blokový tvar matice  $\hat{A}$  vypadá následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Je snadné ukázat, že  $R \in \mathbf{SO}(2)$  a tedy  $R$  je rotace. Proto  $\hat{A}$  můžeme psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tato matice  $\hat{A}$  reprezentuje rotaci a proto ji reprezentuje i matice  $A$ . □



## 4.2 Geometrická interpretace násobení jednotkovým kvaternionem

Nyní ukážeme, co se stane, pokud násobíme jednotkovým kvaternionem  $q = [\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta] = (\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)$ , kde  $\hat{\mathbf{v}}$  je jednotkový ryzí kvaternion (viz Věta 3.7), kvaternion  $p = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$  zleva a později pokud násobíme kvaternion  $p$  jednotkovým kvaternionem  $q$  zprava (viz [4]).

1. Násobíme jednotkovým kvaternionem  $q$  zleva kvaternion  $p$

$$qp = (\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)p.$$

Zvolme jednotkový kvaternion  $t$  tak, aby byl kolmý na  $1$  a  $\hat{\mathbf{v}}$ . Kvaternion  $t$  musí být ryzí, protože je kolmý k  $1$ . Násobení dvou ortogonálních ryzích kvaternionů je stejné jako jejich vektorový součin (viz Poznámka 3.5 č. 2), takže  $\hat{\mathbf{v}}t = \hat{\mathbf{v}} \times t$ ,  $\hat{\mathbf{v}}t$  je kolmý na  $\hat{\mathbf{v}}$ ,  $t$  a  $1$ . Dostali jsme kladně orientovanou ortonormální bázi  $(1, \hat{\mathbf{v}}, t, \hat{\mathbf{v}}t)$ . Vyjádříme  $p$  vzhledem k této bázi

$$p = \hat{s} + \hat{x}\hat{\mathbf{v}} + \hat{y}t + \hat{z}\hat{\mathbf{v}}t.$$

Součin  $qp$  můžeme tedy zapsat jako

$$\begin{aligned} qp &= (\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)(\hat{s} + \hat{x}\hat{\mathbf{v}} + \hat{y}t + \hat{z}\hat{\mathbf{v}}t) \\ &= (\hat{s} \cos \theta - \hat{x} \sin \theta) + \\ &\quad (\hat{s} \sin \theta + \hat{x} \cos \theta)\hat{\mathbf{v}} + \\ &\quad (\hat{y} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta)t + \\ &\quad (\hat{y} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta)\hat{\mathbf{v}}t. \end{aligned} \tag{20}$$

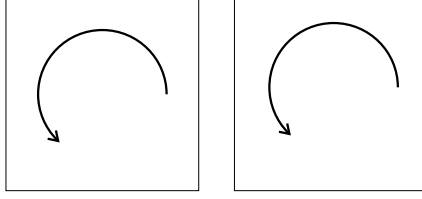
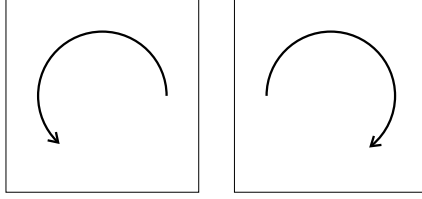
2. Podobně vypadá součin  $pq$

$$\begin{aligned} pq &= (\hat{s} + \hat{x}\hat{\mathbf{v}} + \hat{y}t + \hat{z}\hat{\mathbf{v}}t)(\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta) \\ &= (\hat{s} \cos \theta - \hat{x} \sin \theta) + \\ &\quad (\hat{s} \sin \theta + \hat{x} \cos \theta)\hat{\mathbf{v}} + \\ &\quad (\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta)t + \\ &\quad (-\hat{y} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta)\hat{\mathbf{v}}t. \end{aligned} \tag{21}$$

Připomeňme, že dva podprostory  $\mathbb{E}^a$  a  $\mathbb{E}^b$  euklidovského prostoru  $\mathbb{E}^n$  nazveme totálně kolmé, jestliže jsou totálně kolmá jejich vektorová zaměření.

Zdůrazňeme, že  $(t, \hat{\mathbf{v}}t)$  je totéž co  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$ , což je totálně kolmá rovina k  $(1, \hat{\mathbf{v}})$ .

Z přecházejícího výpočtu dostaneme tyto věty:

Obrázek 1: 1. rovina  $(1, \hat{\mathbf{v}})$ , 2. rovina  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  : Transformace  $p \mapsto (\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)p$ .Obrázek 2: 1. rovina  $(1, \hat{\mathbf{v}})$ , 2. rovina  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  : Transformace  $p \mapsto p(\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)$ .**Věta 4.6** *Transformace*

$$p \mapsto (\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)p$$

představuje otočení v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})$  a  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  kolem počátku o úhel  $\theta$ .

*Důkaz 4.6* Viz vztah (20). Jak víme, rotace v dvourozměrném prostoru se dá vyjádřit jako tato matice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

kde probíhá otočení o úhel  $\theta$ . Tento zápis umožňuje vyjádřit všechny rotace v dvourozměrném prostoru. Rotace může být vyjádřena jako komplexní číslo. Pokud bude  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  pak zobrazení  $z \rightarrow e^{i\theta}z$  reprezentuje otočení o úhel  $\theta$  doleva. Tedy, když se podíváme na vztah (20), vidíme, že se rovina  $(1, \hat{\mathbf{v}})$  otáčí o úhel  $\theta$  a obdobně i rovina  $(t, \hat{\mathbf{v}}t)$  se otáčí o úhel  $\theta$ .  $\square$

**Věta 4.7** *Transformace*

$$p \mapsto p(\cos \theta + \hat{\mathbf{v}} \sin \theta)$$

představuje otočení v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})$  kolem počátku o úhel  $\theta$  a v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  o úhel  $-\theta$ .

*Důkaz 4.7* Viz vztah (21). Důkaz obdobně jako ve Větě 4.6.  $\square$

**Věta 4.8** *Máme dva ortonormální kvaterniony  $a, b$  a reálná čísla  $\alpha, \beta$ , transformace*

$$p \mapsto \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + b\bar{a} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) p \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \bar{a}b \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

nebo ekvivalentně

$$x \mapsto \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + (a \times b) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) x \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + (\bar{a} \times \bar{b}) \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

představuje otočení v rovině  $(a, b)$  kolem počátku o úhel  $\alpha$  a v rovině  $(a, b)^\perp$  o úhel  $\beta$ .

*Důkaz 4.8* Důkaz je zpracován v [9]. □

### 4.3 Rotace v $\mathbf{SO}(4)$

V této kapitole využijeme již zavedené Definice 4.2 a 4.5.

Připomeňme, že lineární ortogonální transformace  $T$  z  $\mathbb{R}^4$  je izometrie a náleží množině

$$\mathbf{GO}(4) = \{T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4\},$$

kde  $T$  je lineární a platí  $|T(p)| = |p|$  pro všechna  $p \in \mathbb{R}^4$ .

**Věta 4.9** *Lineární ortogonální transformace zachovává úhly.*

*Důkaz 4.9*  $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y \implies |T(x)||T(y)| \cos \theta_1 = |x||y| \cos \theta_2 \implies \cos \theta_1 = \cos \theta_2 \implies \theta_1 = \theta_2$ , protože  $\theta_1$  a  $\theta_2$  jsou z intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . □

**Věta 4.10** *Pro jednotkové kvaterniony  $q, r$  je transformace*

$$p \mapsto qpr \in \mathbf{SO}(4).$$

*Důkaz 4.10* Nechť  $T(p) = qpr$ .  $T$  je díky vlastnostem kvaternionů zřejmě lineární.  $|T(p)| = |qpr| = |q||p||r| = |p|$ .  $\det T = \det(qr, q\mathbf{i}r, q\mathbf{j}r, q\mathbf{k}r) = \bar{q}\bar{r} p\mathbf{i}r \overline{q\mathbf{j}r} q\mathbf{k}r = (\bar{q}\bar{r})(p\mathbf{i}r)(-\bar{r}\mathbf{j}\bar{q})(q\mathbf{k}r) = -\bar{r}(\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k})r = \bar{r}r = 1$ . □

**Věta 4.11** *Každý element  $\mathbf{SO}(4)$  můžeme vyjádřit jako*

$$p \mapsto qpr, \tag{22}$$

kde  $q, r \in \mathbb{H}_1$ .

*Důkaz 4.11* Pro element z transformace  $T$  prostoru  $\mathbf{SO}(4)$  vytvoříme rotaci  $R_{qr}(p) = qpr$ . Vytvoříme  $T(p) = T(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) = \hat{s}T(1) + \hat{x}T(\mathbf{i}) + \hat{y}T(\mathbf{j}) + \hat{z}T(\mathbf{k}) = \hat{s}R(1) + \hat{y}R(\mathbf{i}) + \hat{y}R(\mathbf{j}) + \hat{z}R(\mathbf{k}) = R(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) = R_{qr}(p)$ . Nyní použijeme Větu 4.8, vytvoříme rotaci  $A$ , která přenesse 1 do  $T(1)$ , rotaci  $B$ , která přenesse  $A(\mathbf{i})$  do  $T(\mathbf{i})$  a ponechá  $T(1)$ , rotaci  $C$ , která přenesse  $BA(\mathbf{j})$  do  $T(\mathbf{j})$  a zachová  $T(1)$  a  $T(\mathbf{i})$ . Nyní máme  $T(p) = (CBA)(p)$ . □

**Věta 4.12**  $\mathbf{SO}(4) = \{p \mapsto qpr\}$ , kde  $q, r \in \mathbb{H}_1$ .

*Důkaz 4.12* Ve Větě 4.10 stojí, že transformace  $p$  jsou podmnožinou  $\mathbf{SO}(4)$  a Věta 4.11 říká, že  $\mathbf{SO}(4)$  je podmnožinou transformací  $p$ . □

#### 4.4 Rotace v $\mathbf{SO}(3)$

Pro jakýkoliv nenulový kvaternion  $p$  a  $r$  jsou obě zobrazení  $r \mapsto pr$  a  $r \mapsto rp$  lineární. Podíváme se na zobrazení  $R_{qr}(p) : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ , které má tvar  $p \mapsto qpr$ , kde  $r, q \in \mathbb{H}$  jsou jisté dva nenulové kvaterniony takové, že  $\|r\| \|q\| = 1$ .

**Poznámka 4.3** Pokud položíme  $r = q^{-1}$ , pak zobrazení  $R_{q,q^{-1}}(p)$  označíme jednoduše jako  $R_q(p)$ .  $\square$

**Věta 4.13** Každý element v  $\mathbf{SO}(3)$  se dá vyjádřit jako

$$p \mapsto qp\bar{q}, \quad (23)$$

kde  $p$  je ryzí kvaternion a  $q$  je jednotkový kvaternion.

*Důkaz 4.13* Využijeme Věty 4.6 a 4.7. Větu 4.7 modifikujeme a pro násobení zprava konjugovaným kvaternionem dostaneme  $p\bar{q} = p(\cos(-\theta) + \sin(-\theta))$ . Věta 4.6 nám říká, že násobení zleva představuje otočení v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})$  a  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  kolem počátku o úhel  $\theta$ . Upravená Věta 4.7 říká, že násobení zprava představuje otočení v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})$  kolem počátku o úhel  $-\theta$  a v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  kolem počátku o úhel  $\theta$ . To znamená, že probíhá otočení pouze v rovině  $(1, \hat{\mathbf{v}})^\perp$  o úhel  $2\theta$  a rovina  $(1, \hat{\mathbf{v}})$  je invariantní. Je to tedy rotace v trojrozměrném prostoru kolem osy dané vektorem  $\hat{\mathbf{v}}$  o úhel  $2\theta$ .  $\square$

**Poznámka 4.4** Pokud je kvaternion  $q$  jednotkový, můžeme zapsat Větu 4.13 takto :  $p \mapsto qpq^{-1}$ . Z Věty 3.5 plyne, že pokud je  $q$  jednotkový kvaternion, tedy platí vztah (11), pak  $\bar{q} = q^{-1}$ .  $\square$

**Věta 4.14** Nechť  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $q = [\cos \theta, \sin \theta \hat{\mathbf{v}}]$ . Nechť  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  a  $p = [0, \mathbf{r}] \in \mathbb{H}$ . Pak

$$\hat{p} = qpq^{-1} \quad (24)$$

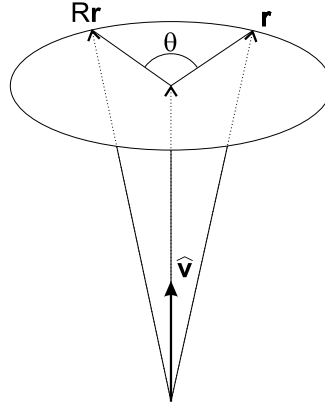
je  $p$  otočen o úhel  $2\theta$  kolem osy, která je daná směrovým vektorem  $\hat{\mathbf{v}}$ .

*Důkaz 4.14* Můžeme využít Věty 4.6 a Věty 4.7, ale pro důkaz této věty zvolíme jiný způsob. Nejdříve ukážeme, jak se vektor  $\mathbf{r}$  otáčí o úhel  $\theta$  kolem osy dané vektorem  $\hat{\mathbf{v}}$ . Využijeme zde algebraické funkce, vektorový a skalární součin. Ten samý výsledek najdeme později pomocí kvaternionu.

Předpokládejme, že  $\mathbf{r}$  se otočí kolem osy dané jednotkovým vektorem  $\hat{\mathbf{v}}$  do polohy  $R\mathbf{r}$  o nějaký úhel  $\theta$ .

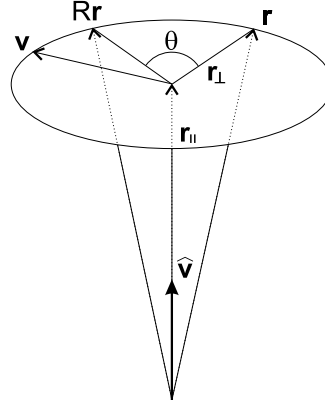
Vektor  $\mathbf{r}$  můžeme zapsat jako součet dvou složek  $\mathbf{r}_\parallel$  a  $\mathbf{r}_\perp$ , kde  $\mathbf{r}_\parallel$  je projekce  $\mathbf{r}$  na  $\hat{\mathbf{v}}$  a  $\mathbf{r}_\perp$  je ortogonální k  $\hat{\mathbf{v}}$ . Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\parallel &= (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{r}_\perp &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Obrázek 3: Otočení vektoru  $\mathbf{r}$  kolem osy  $\hat{\mathbf{v}}$  o úhel  $\theta$ .

Nahradíme souřadnicový systém v rovině, která je ortogonální k  $\hat{\mathbf{v}}$  a obsahuje určené vektory  $\mathbf{r}$  a  $R\mathbf{r}$ . Potřebujeme vektor  $\mathbf{v}$ , který je ortogonální k  $\mathbf{r}_\perp$  a  $\hat{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}_\perp = \hat{\mathbf{v}} \times (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}) = \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r} - \hat{\mathbf{v}} \times (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r} - \mathbf{0} = \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}.$$

Obrázek 4: Vektor  $\mathbf{v}$  ortogonální k  $\mathbf{r}_\perp$  a  $\hat{\mathbf{v}}$ .

Vektor  $R\mathbf{r}$  můžeme opět zapsat jako součet dvou složek  $(R\mathbf{r})_\perp$  a  $(R\mathbf{r})_\parallel$ . V rovinném souřadnicovém systému, který je ortogonální k vektoru  $\hat{\mathbf{v}}$  můžeme pro  $(R\mathbf{r})_\perp$  použít vztah  $(R\mathbf{r})_\perp = \mathbf{r}_\perp \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta$ .

Nyní dostáváme

$$\begin{aligned} R\mathbf{r} &= (R\mathbf{r})_\parallel + (R\mathbf{r})_\perp \\ &= \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta \\ &= (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}) \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \cos \theta + \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta \\
&= (1 - \cos \theta)(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{r} \cos \theta + (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}) \sin \theta.
\end{aligned} \tag{25}$$

Z Věty 4.14 víme, že  $R_q(p) = qpq^{-1}$ . Připomeňme, že  $p = [0, \mathbf{r}]$  a  $q$  je jednotkový kvaternion  $q = [s, \mathbf{v}]$ .

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, \mathbf{v}]^{-1} \\
&= [s, \mathbf{v}][0, \mathbf{r}][s, -\mathbf{v}] \\
&= [s, \mathbf{v}][\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}] \\
&= [s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}), s(s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\
&= [0, s^2\mathbf{r} - s(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (s\mathbf{r}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\
&= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - 2s(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \\
&= [0, s^2\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})] \quad (*) \\
&= [0, (s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})].
\end{aligned}$$

(\*) Zde využijeme identitu, tzv. dvojný součin  $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$ .

Protože  $q$  je jednotkový kvaternion, můžeme napsat  $q = [\cos \theta, (\sin \theta)\hat{\mathbf{v}}]$  viz vztah (18), kde  $|\hat{\mathbf{v}}| = 1$ .

Dosadíme do  $R_q(p)$  a dostaneme

$$\begin{aligned}
R_q(p) &= [0, (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}})]\mathbf{r} + 2((\sin \theta)\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r})(\sin \theta)\hat{\mathbf{v}} + \\
&\quad 2 \cos \theta((\sin \theta)\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}) \\
&= [0, (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\mathbf{r} + (2\hat{\mathbf{v}} \sin^2 \theta)(\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}) + 2 \cos \theta \sin \theta(\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r})] \\
&= [0, \mathbf{r} \cos 2\theta + (1 - \cos 2\theta)(\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{v}} + (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{r}) \sin 2\theta].
\end{aligned} \tag{26}$$

Z výše uvedeného odvození vidíme, že výraz (26) je stejný jako výraz (25), liší se pouze ve velikosti úhlu. Všimněme si, že úhel v rovnosti (26) je  $2\theta$  namísto  $\theta$ . Tak dostaneme jednotkový vektor  $\hat{\mathbf{v}}$  a úhel rotace  $\theta$ , jednotkový kvaternion  $[\cos \theta, \sin \theta \hat{\mathbf{v}}]$  otáčí vektor  $\mathbf{r}$  o úhel  $2\theta$  kolem  $\hat{\mathbf{v}}$ .  $\square$

**Věta 4.15** *Nechť  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$ . Skládání rotací je možno vyjádřit jako násobení kvaternionů. Rotace pomocí  $q_1$  následovaná rotací  $q_2$  je ekvivalentní rotaci  $q_2q_1$ , tedy skládání rotací je dosaženo násobením odpovídajících si kvaternionů.*

*Důkaz 4.15* Pokud  $p \in \mathbb{H}$ , pak za použití vzorců (9) a (14) dostáváme následující rovnost

$$\begin{aligned}
q_2(q_1pq_1^{-1})q_2^{-1} &= (q_2q_1)p(q_1^{-1}q_2^{-1}) \\
&= (q_2q_1)p(\bar{q}_1\bar{q}_2) \\
&= (q_2q_1)\overline{p(q_1q_2)} \\
&= (q_2q_1)p(q_1q_2)^{-1}.
\end{aligned} \quad \square$$

Osu a úhel rotace můžeme vzít z kvaternionové reprezentace rotace.

**Věta 4.16** *Nechť  $q \in \mathbb{H}$  a  $q = [s, \mathbf{v}]$ , kde  $v$  je nenulový ryzí kvaternion, osa rotace  $R_q(p)$  je určena počátkem a vektorem  $\mathbf{v}$  v  $\mathbb{R}^3$ , který odpovídá ryzímu kvaternionu  $v$ . Úhel rotace  $\theta$  je roven  $\pi$ , pokud  $s = 0$ , nebo pro  $s \neq 0$  je úhel rotace dán vztahem*

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{|s|}, \quad (27)$$

kde  $0 < \theta \leq \pi$ .

*Důkaz 4.16* Důkaz této věty je poněkud zdlouhavější, lze ho nalézt např. v [2]. □

## 5 Užití kvaternionů

### 5.1 Rotace využívající kvaterniony

Pokusíme se vypočítat výslednou pozici bodu  $p$  po transformaci bodu  $p$  z původní pozice. Využijeme vztahu (23) a vypočítáme.

Tedy

$$\hat{p} = qp\bar{q}, \quad (28)$$

kde  $p$  je původní pozice bodu :  $p = 0 + \mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z$ ,  $\hat{p}$  je výsledná pozice bodu po transformaci,  $q$  je kvaternion :  $q = q_s + \mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z$ ,  $\bar{q}$  je konjugovaný kvaternion :  $\bar{q} = q_s - \mathbf{i}q_x - \mathbf{j}q_y - \mathbf{k}q_z$ .

**Poznámka 5.1** Souřadnice budeme značit  $x, y, z$  a složky kvaternionu budeme pro větší přehlednost značit takto :  $q_s, q_x, q_y, q_z$ . □

Nyní můžeme dosadit tyto elementy do vzorce (28).

Nejdříve dosadíme  $p$  a  $\bar{q}$

$$\hat{p} = q(0 + \mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z)(q_s - \mathbf{i}q_x - \mathbf{j}q_y - \mathbf{k}q_z),$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{p} &= q_0 q_s + xq_x + yq_y + zq_z \\ &+ \mathbf{i}(xq_s - 0q_x - yq_z + zq_y) \\ &+ \mathbf{j}(-0q_y + xq_z + yq_s - zq_x) \\ &+ \mathbf{k}(0(-q_z) - xq_y + yq_x + zq_s). \end{aligned}$$

Nyní dosadíme za  $q$  a po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \Re &= 0, \\ \mathbf{i} &= x(q_x q_x + q_s q_s - q_y q_y - q_z q_z) + y(2q_x q_y - 2q_s q_z) + z(2q_x q_z + 2q_s q_y), \\ \mathbf{j} &= x(2q_s q_z + 2q_x q_y) + y(q_s q_s - q_x q_x + q_y q_y - q_z q_z) + z(-2q_s q_x + 2q_y q_z), \\ \mathbf{k} &= x(-2q_s q_y + 2q_x q_z) + y(2q_s q_x + 2q_y q_z) + z(q_s q_s - q_x q_x - q_y q_y + q_z q_z). \end{aligned}$$

Dostaneme jednotlivé složky  $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$

$$\begin{aligned}\hat{p}_x &= x(q_x q_x + q_s q_s - q_y q_y - q_z q_z) + y(2q_s q_y - 2q_s q_z) + z(2q_x q_z + 2q_s q_y), \\ \hat{p}_y &= x(2q_s q_z + 2q_x q_y) + y(q_s q_s - q_x q_x + q_y q_y - q_z q_z) + z(-2q_s q_x + 2q_y q_z), \\ \hat{p}_z &= x(-2q_s q_y + 2q_x q_z) + y(2q_s q_x + 2q_y q_z) + z(q_s q_s - q_x q_x - q_y q_y + q_z q_z),\end{aligned}$$

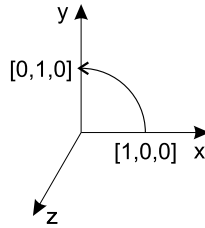
které můžeme následovně zapsat do matice

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x q_x + q_s q_s - q_y q_y - q_z q_z & 2q_x q_y - 2q_s q_z & 2q_x q_z + 2q_s q_y \\ 2q_s q_z + 2q_x q_y & q_s q_s - q_x q_x + q_y q_y - q_z q_z & -2q_s q_x + 2q_y q_z \\ -2q_s q_y + 2q_x q_z & 2q_s q_x + 2q_y q_z & q_s q_s - q_x q_x - q_y q_y + q_z q_z \end{bmatrix},$$

a pokud použijeme vztah  $q_s q_s + q_x q_x + q_y q_y + q_z q_z = 1$  matici můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 - 2q_z q_z - 2q_y q_y & -2q_z q_s + 2q_y q_x & 2q_y q_s + 2q_z q_x \\ 2q_x q_y + 2q_s q_z & 1 - 2q_z q_z - 2q_x q_x & 2q_z q_y - 2q_x q_s \\ 2q_x q_z - 2q_s q_y & 2q_y q_z + 2q_s q_x & 1 - 2q_y q_y - 2q_x q_x \end{bmatrix}. \quad (29)$$

**Příklad 5.1** Jako příklad užití kvaternionů v trojrozměrné rotaci budeme uvažovat bod o souřadnicích  $[1, 0, 0]$ , který se otočí kolem osy  $z$  o  $90^\circ$  ( $\frac{\pi}{2}$  rad) do pozice  $[0, 1, 0]$  viz Obrázek 5.



Obrázek 5: Rotace z bodu  $[1, 0, 0]$  kolem osy  $z$  do bodu  $[0, 1, 0]$ .

1. Použijeme následující vzorec k převodu z reprezentace osa–úhel do kvaternionů (odvození naleznete v kap. 5.2.)

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}(x \sin \frac{\theta}{2}) + \mathbf{j}(y \sin \frac{\theta}{2}) + \mathbf{k}(z \sin \frac{\theta}{2}).$$

Po dosazení dostaneme

$$q = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i}(0 \sin \frac{\pi}{4}) + \mathbf{j}(0 \sin \frac{\pi}{4}) + \mathbf{k}(1 \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Vraťme se zpět k rotaci z bodu  $[1, 0, 0]$  do bodu  $[0, 1, 0]$ . První bod bude reprezentovat kvaternion  $0 + \mathbf{i}1 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0$  a druhý bude reprezentován kvaternionem  $0 + \mathbf{i}0 + \mathbf{j}1 + \mathbf{k}0$ . Pro výpočet použijeme předcházejícího vzorce (28). Tedy

$$\hat{p} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\mathbf{i}1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{k}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Vynásobením kvaternionů dostaneme

$$\mathbf{i}\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{1}{2} + \mathbf{j}\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{1}{2} = \mathbf{j}.$$

Výsledek je  $[0, 1, 0]$ .

2. Použijeme předešlé rovnosti (29). Pokud do matice dosadíme hodnoty, výsledná matice bude

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

která reprezentuje otočení o  $90^\circ$  do bodu  $[0, 1, 0]$ . □

## 5.2 Převod reprezentace osa–úhel do kvaternionů

Rotace může být reprezentována libovolným jednotkovým vektorem a orientovaným úhlem otočení kolem tohoto vektoru (osy). Využívají se například kvaterniony, matice, Eulerovy úhly nebo reprezentace osa–úhel, kterou se budeme nyní zabývat.

### Osa–úhel

Tato reprezentace je jednou z možností jak určit rotaci. Udává osu rotace  $\mathbf{n}$  a úhel rotace  $\theta$  kolem této osy dle pravidla pravé ruky. Vektor  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  je jednotkový vektor a platí  $\mathbf{nn} = 1$ . Osa  $\mathbf{n}$  se někdy nazývá vlastní osa. Tato reprezentace popisuje rotaci čtveřicí čísel. První tři určují vektor osy rotace a čtvrté značí úhel otočení kolem této osy. Reprezentace osa–úhel našla uplatnění například v aplikacích jako je CAD (Computer Aided Design). Tato reprezentace je velmi blízká kvaternionu a proto si ukážeme její převod.

Máme dány rovnosti

$$q_x = n_x \sin \frac{\theta}{2}, \tag{30}$$

$$q_y = n_y \sin \frac{\theta}{2}, \tag{31}$$

$$q_z = n_z \sin \frac{\theta}{2}, \tag{32}$$

$$q_s = \cos \frac{\theta}{2}, \tag{33}$$

kde osa je normovaná takto

$$n_x n_x + n_y n_y + n_z n_z = 1, \quad (34)$$

a kvaternion je normován takto

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + n_x n_x \sin^2 \frac{\theta}{2} + n_y n_y \sin^2 \frac{\theta}{2} + n_z n_z \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1. \quad (35)$$

Nyní si ukážeme jak vznikly předcházející vztahy.

Pomocí trigonometrického vzorce můžeme napsat

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1. \quad (36)$$

Vzorec (36) vynásobíme vztahem (34) a dostaneme

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = (n_x n_x + n_y n_y + n_z n_z) \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Po roznásobení máme

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + n_x n_x \sin^2 \frac{\theta}{2} + n_y n_y \sin^2 \frac{\theta}{2} + n_z n_z \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1. \quad (37)$$

Vidíme, že vztahy (35) a (37) jsou stejné. Kvaternion je normovaný, protože je ve formě

$$q_s^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1.$$

Z výše uvedených vztahů dostaneme jednotlivé složky kvaternionu.

$$\begin{aligned} q_x &= n_x \sin \frac{\theta}{2}, \\ q_y &= n_y \sin \frac{\theta}{2}, \\ q_z &= n_z \sin \frac{\theta}{2}, \\ q_s &= \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Poslední část nebyla přesným důkazem, ale můžeme snadno zjistit, že je správně, pokud budeme kontrolovat rotace samostatně kolem každé osy (viz [7]).

Výsledný vzorec je

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}(n_x \sin \frac{\theta}{2}) + \mathbf{j}(n_y \sin \frac{\theta}{2}) + \mathbf{k}(n_z \sin \frac{\theta}{2}), \quad (38)$$

kde tedy  $\theta$  je úhel rotace a  $n_x, n_y, n_z$  je vektor reprezentující osu otočení.

**Příklad 5.2** Vytvoříme rotaci z bodu  $[1, 0, 0]$  o  $90^\circ$  ( $\frac{\pi}{2}$  rad) do pozice  $[0, 1, 0]$  viz Obrázek 5. Pro tuto rotaci je  $\theta = \pi$  a  $\mathbf{n} = [1, 0, 0]$ . Hodnoty můžeme dosadit do vzorce (38)

$$q = \cos \frac{\theta}{4} + \mathbf{i}(1 \sin \frac{\theta}{4}) + \mathbf{j}(0 \sin \frac{\theta}{4}) + \mathbf{k}(0 \sin \frac{\theta}{4}),$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

dostáváme

$$q_x = \frac{\sqrt{2}}{2}, q_y = 0, q_z = 0, q_s = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Výsledný kvaternion je  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ . □

### 5.3 Různé využití kvaternionů v praxi

Uvedeme zde některé způsoby použití kvaternionů. Již v úvodu jsme zmínili, že se jednotkové kvaterniony využívají především v animaci. Existují i jiná odvětví, kde se právě tato technika využívá. Vzhledem k tomu, že kvaterniony reprezentují rotace, tak je můžeme využít téměř ve všech simulacích, kde se objevují rotace, a pro které jsou nevhodné maticové či jiné reprezentace.

V další části textu se dozvíme, že kvaterniony hrají důležitou roli například v lékařství, kde se kvaterniony většinou používají jako prostředek grafické vizualizace či k ovládání lékařských sond. Ze simulací využívající kvaterniony můžeme konkrétně zmínit využití pro letové simulace. Ty nám velmi dobře umožní získat potřebné informace o tom, jak se letadlo bude chovat v reálném prostředí. Dalším příkladem mohou být kvaterniony popisující oběhy družic, jejichž poloha je důležitá například pro komunikaci.

Kvaterniony nacházejí uplatnění i v reálných aplikacích typu bezpilotní letadlo, řízené střely a robotika.

#### Satellite Tool Kit

Satellite Tool Kit (STK) je softwarové jádro, které je dostupné pro jakoukoliv vládu a vzdušný prostor. STK poskytuje analytický systém, který je schopen vypočítat data a zobrazit dvourozměrné mapy. Na mapách jsou znázorněny různé časově závislé situace pro družice a další objekty, kterými jsou například řízené střely nebo letadla. Hlavní schopností STK je zahrnutí analýzy sensorového pokrytí pro jakékoliv objekty vytvářené v STK nebo zahrnutí oběžné dráhy tvořenou efenerida. Efenerida je seznam pozic, které jsou předpovězené pro určité časové intervaly budoucnosti ze známé oběžné dráhy.

V hlavním STK programu je tedy zahrnuta trajektorie oběžné dráhy. Výchozí oběžnou dráhu můžeme zadat v pravoúhlých souřadnicích nebo orbitálními Keplerovými elementy, což je obvykle používaná množina, jejíž elementy jsou nezbytné k popisu oběžné dráhy.

STK tvoří vizualizační prostředek, který je dobrý pro určení, zda-li byla správně vytvořena oběžná dráha.

STK je schopen vytvářet údaje, které obsahují pozici a rychlost družice v přesně stanovených časových intervalech. Principy výpočtů mohou být založeny na Eulerových úhlech nebo kvaternionech. Upravené simulační profily AGHS (Advanced GPS Hybrid Simulation viz [17], GPS–Global Position System) používají kvaterniony pro popis oběhu družice (viz [20]).

### **Simulace letadla**

Letadlové simulace jsou pravděpodobně jednou z nejnáročnějších aplikací v oblasti her. Microsoft Flight Simulator (MFS) je jedním z nejvíce pokročilých simulátorů. Tyto programy poskytují realistickou simulaci letu díky implementaci klasické letadlové pohybové rovnici, kvaternionové transformační metodě a dalším metodám.

### **Bezpilotní prostředek**

Obecně je bezpilotní prostředek představován jako létající prostředek bez lidské posádky. V armádě většinou nalézá využití v operacích, kde je nevhodné vystavovat pilotované prostředky a jejich obsluhu nebezpečí pro velmi pravděpodobnou možnost zničení. Malá velikost umožňuje nepozorovaně proklouznout do rizikových oblastí. Dlouhá doba letu na větší vzdálenost ho předurčuje k nasazení na dlouhodobé úkoly a odpadá nutný čas pro regeneraci sil posádky.

Pro funkci bezpilotního prostředku je nezbytné znát polohové úhly (orientaci, úhly natočení vůči referenčnímu souřadnicovému systému). Tato informace umožňuje prostředkům pohybovat se požadovaným směrem a vykonávat zadanou funkci. Cílem je vytvořit systém, který umožňuje schopnost orientace letounu.

Řešení spočívá v numerické integraci změn natočení os v některé z metod reprezentace orientace. Pro reprezentaci vypočítané orientace letounu byly použity kvaterniony (viz [21]).

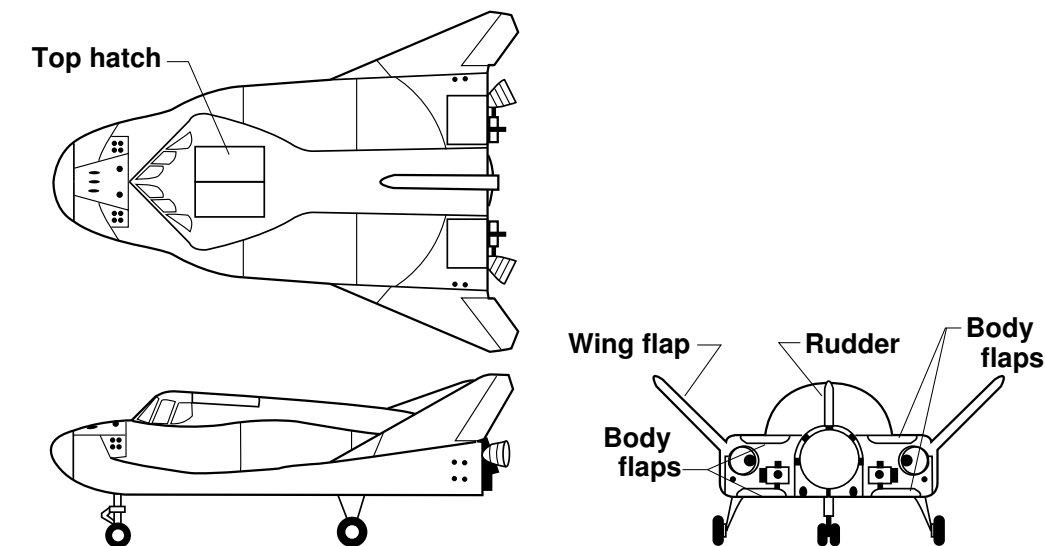
### **Využití pro letové simulace**

Po prvních letových testech raketoplánu Space Shuttle v roce 1977 a jeho uvedení do provozu v roce 1981 se začala NASA (National Aeronautics and Space Administration) zabývat menšími dopravními prostředky s vícenásobným použitím, které by zajistily kyvadlovou dopravu na oběžnou dráhu Země. Po roce 1990 se objevil projekt vztlakového

tělesa HL-20. Na oběžnou dráhu mělo být dopraveno pomocí raket nebo mohla být doprava zajištěna v nákladovém prostoru Space Shuttle. K sestupu do atmosféry bylo těleso HL-20 vybaveno raketovými motory. Záměrem vývojářů NASA bylo vytvořit levnější variantu prostředku pro dopravu na nízkou oběžnou dráhu kolem Země s možností rychlého opakovaní vzletu. Dalším cílem bylo zajistit zvýšenou bezpečnost a možnost přistát na letištích jako konvenční letadlo. HL-20 mělo sloužit i jako nouzový prostředek pro dopravu ohrožených kosmonautů, zajišťovat výměnu posádek na mezinárodní vesmírné stanici nebo zajišťovat opravu satelitů.

Právě pomocí prostředí MATLAB, Simulink a nadstavbové knihovny Aerospace Blockse, lze vytvořit simulaci pohybu vztlakového tělesa HL-20.

Pro simulaci pohybu letounu lze využít pohybové rovnice s třemi stupni (pro podélný pohyb letounu) nebo s šesti stupni volnosti. Souřadnicová soustava je americká, kde svislá osa  $z$  směřuje dolů a kladná osa pro boční sílu  $y$  směřuje vpravo ve směru letu. Poloha letounu, jako je například výška a natočení vzhledem k Zemi, se počítá v zemské souřadnicové soustavě v Eulerových úhlech nebo kvaternionech (viz [23]).



Obrázek 6: HL-20.

## Lékařství

Kvaterniony se dále využívají v interaktivních modelech, které mohou pomoci například lékařům při léčbě zlomenin. Kdy je nutné přiložit tvarovatelnou dlahu přímo na kost a připevnit ji pomocí fixačních šroubů. Vytváří se obecný virtuální model dlahy. Hledá se vhodný způsob pro umístování dlahy na povrch trojrozměrného modelu kosti, za pomoci definování křivky na povrchu modelu kosti a omezením pohybu dlahy pouze na tuto křivku, která je doprovázena automatickou změnou tvaru dlahy, aby odpovídal tvaru povrchu kosti.

Pro vytvoření trojrozměrného obrazu kostí potřebujeme vytvořit základní aplikaci umožňující zobrazení trojrozměrné scény, vhodný systém pro správu objektů, implementaci základních operací a další. Důležitá je manipulace s objekty, kde se využívají operace, posunutí, otočení, změna měřítka a zkosení. Právě při otočení se používají kvaterniony. Neobsahují zbytečné údaje (devět čísel místo tří hodnot úhlů natočení) a přechod z jedné obecné polohy do jiné, pomocí interpolovaného otáčení ve třech směrech, lze vyřešit lépe než maticemi (viz [22]).

Dalším použitím kvaternionů v tomto odvětví je virtuální sigmoidoskop, neinvazivní počítačová lékařská metoda pro zkoumání celého tlustého střeva, sloužící k nalezení polypů. Tato metoda je založena na kamerovém kontrolním modelu. Mechanismus zkoumá povrch a současně zabraňuje srážkám sigmoidoskopu se stěnou tlustého střeva. K ovládní této kamery se využívají právě kvaterniony (viz [18]).

## 6 Závěr

Algebra kvaternionů představuje speciální odvětví matematiky, které se postupem času vyvinulo z reálných čísel přidáním tří imaginárních složek. Tyto čtveřice nejsou konečným zobecněním komplexních čísel. Existují další hyperkomplexní čísla a to oktoniony, které mají také specifické vlastnosti. Kvaterniony jsou stále velmi zajímavou oblastí matematiky, která se využívá v mnoha technických oblastech. Nejvíce v počítačové grafice či mechanice, například pro letové simulace. Výpočet rotací pomocí kvaternionů je výhodnější než pomocí matic, protože kvaterniony obsahují pouze čtyři složky, zatímco matice mají složek devět.

V této práci bylo předvedeno, jak mohou kvaterniony reprezentovat rotace. Byly zde definovány kvaterniony a poté zmíněny jejich základní vlastnosti. Dále bylo dokázáno, že matice  $A$  popisuje rotaci kolem osy procházející počátkem, právě když  $A$  je z  $\mathbf{SO}(3)$ . Kde  $\mathbf{SO}(3)$  je speciální ortogonální grupa. Hlavním cílem bylo dokázat, že rotace pomocí kvaternionů lze vyjádřit v  $\mathbf{SO}(4)$  a ve speciálním případě právě v  $\mathbf{SO}(3)$ .

Byla zde vytvořena geometrická interpretace násobení jednotkovým kvaternionem. Touto interpretací je rotace. Výsledná rotace závisí na tom, zda násobíme zleva nebo zprava jednotkovým kvaternionem, což je způsobeno nekomutativností tohoto násobení. Jestliže budeme uvažovat rotace v  $\mathbf{SO}(4)$ , pak ve speciálním případě vznikne taková rotace, kterou můžeme aplikovat jako rotaci v  $\mathbf{SO}(3)$ . Kombinací a úpravou Vět 4.6 a 4.7 dostaneme tento vztah pro rotaci:  $\hat{p} = qpq^{-1} = (\cos \theta + \sin \theta \hat{v})p(\cos \theta - \hat{v} \sin \theta)$ , kde  $q$  je jednotkový kvaternion. V prostoru  $\mathbb{R}^4$  si můžeme rotaci, která vznikne násobením jednotkovým kvaternionem  $q$  zleva a kvaternionem  $q^{-1}$  zprava, představit jako rotaci dvou na sebe totálně kolmých rovin  $(1, \hat{v})$  a  $(1, \hat{v})^\perp$ . Násobení zleva představuje v rovině  $(1, \hat{v})$  otočení kolem počátku o úhel  $\theta$  a v rovině  $(1, \hat{v})^\perp$  představuje také otočení kolem počátku o úhel  $\theta$ . Násobení zprava představuje v rovině  $(1, \hat{v})^\perp$  opět otočení kolem počátku o úhel  $\theta$ , ale v rovině  $(1, \hat{v})$  představuje otočení kolem počátku o úhel  $-\theta$ . To znamená, že výsledná rotace proběhla pouze v rovině  $(1, \hat{v})^\perp$  o úhel  $2\theta$ , zatímco rovina  $(1, \hat{v})$  zůstala invariantní. Jedná se tedy o rotaci v prostoru  $\mathbb{R}^3$  kolem osy dané vektorem  $\hat{v}$  o úhel  $2\theta$ .

Další část práce je věnována vztahu kvaternionů s jinými reprezentacemi rotace, např. osa–úhel. Je zde uvedeno několik jednoduchých příkladů k rychlému nahlédnutí.

Konec práce je zaměřen na využití kvaternionů a na některé jejich zajímavé aplikace v reálném prostředí. Například v lékařství, kde se mohou kvaterniony využívat k ovládání sond, nebo pro konstrukci bezpilotního prostředku.

## Literatura

- [1] CONWAY, J. H., SMITH, D. A. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*. 1. vyd, USA : Springer, 2003.
- [2] GALLIER, J. *Geometric methods and applications*. 1. vyd, USA : Springer, 2001.
- [3] CROWE, M. J. *History of vector analysis*. 1. vyd, USA : Dover Publications, 1994.
- [4] SINGER, D. A. *Geometry: plane and fancy*. 1. vyd, USA : Springer, 1998.
- [5] STILLWELL, J. *Geometry of surfaces*. 1. vyd, USA : Springer, 1995.
- [6] WEISSTEIN, E. W. *MathWorld-Euler's Rotation Theorem*. [online]. [cit. 2006-04-25]. Dostupný na WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/EulersRotationTheorem.html>>.
- [7] BAKER, M. *EuclideanSpace-Quaternions*. [online]. [cit. 2006-04-03]. Dostupný na WWW: <<http://www.euclideanspace.com/maths/algebra/realNormedAlgebra/quaternions/index.htm>>.
- [8] *Wikipedia - Quaternion*. [online]. [cit. 2006-03-20]. Dostupný na WWW: <<http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>>.
- [9] LAWRENCE, M. J. *Four-dimensional geometry and visualization*. [online]. [cit. 2006-03-22]. Dostupný na WWW: <<http://www.gang.umass.edu/lawrence/downloads/four-1.0.2.pdf>>.
- [10] DAM, B. E., KOCH, M., LILLHOLM, M. Quaternions, Interpolation and animation. *Technical report*. 1998, 5. číslo, s. 9–23.
- [11] BEČVÁŘ, J. 150 let od objevu kvaternionů. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 1993, 38. ročník, 6. číslo, s. 305–317.
- [12] HORA, J. O kvaternionech. *Rozhledy matematiky-fyziky*. 1995, 72. ročník, s. 8–9.
- [13] HURWITZ, A. Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*. 1998. s. 309–316.
- [14] BADGER, M. *Division algebras over the real numbers*. [online]. [cit. 2006-03-22]. Dostupný na WWW: <<http://www.pitt.edu/mab39/divalg3.pdf>>.
- [15] KLAIN, D. Lectures notes on orthogonal matrices. *Linear algebra II*. [online]. [cit. 2006-05-10]. Dostupný na WWW: <<http://faculty.uml.edu/dklain/orthogonal.pdf>>.
- [16] CONRAD, K. *Isometries of  $\mathbb{R}^n$* . [online]. [cit. 2006-03-10]. Dostupný na WWW: <<http://www.math.uconn.edu/kconrad/math315/315isometryRn.pdf>>.



- 
- [17] *Advanced GPS hybrid simulation*. [cit. 2006-05-17]. Dostupný na WWW: <[http://www.navsys.com/brochures/NAVSYS\\_AGHS.pdf](http://www.navsys.com/brochures/NAVSYS_AGHS.pdf)>.
- [18] HONG, L., MURAKI, S. Virtual voyage: Interactive Navigation in the human colon. *SIGGRAPH 97*. New York, 1997.
- [19] ZYSKOWSKI, M., K. Aircraft simulations techniques used in low/cost, commercial software. *Modeling and simulation technologies conference and exhibit*. Texas, 2003.
- [20] GOLD, K., BROWN, A. *GPS/IMU navigation and simulation for higher-than-GPS orbits*. [online]. [cit. 2006-05-10]. Dostupný na WWW: <<http://www.navsys.com/Papers/0409003.pdf>>.
- [21] KŘIVÁNEK, V. *Diagnostická ústředna–Automatizovaný systém sběru dat u bezpilotního prostředku*. Brno, 2003.
- [22] JEDLIČKA, L. Interaktivní umístování virtuální dlahy na 3D modely kostí. *Bakalářská práce*. Brno, 2006.
- [23] BITTTNER, K. *Simulace pohybu vztalakového telesa NASA HL-20 pomocí systému MATLAB*. [online]. [cit. 2006-05-17]. Dostupný na WWW: <[http://www.humusoft.cz/pub/matlab/03\\_04/aerosp.htm](http://www.humusoft.cz/pub/matlab/03_04/aerosp.htm)>.