Besselovy funkce

Řešení Laplaceovy nebo Helmholtzovy rovnice ve válcových souřadnicích

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-m^2\right)y=0\,. \tag{1}$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left(x^2+m^2\right)y=0\,. \tag{2}$$

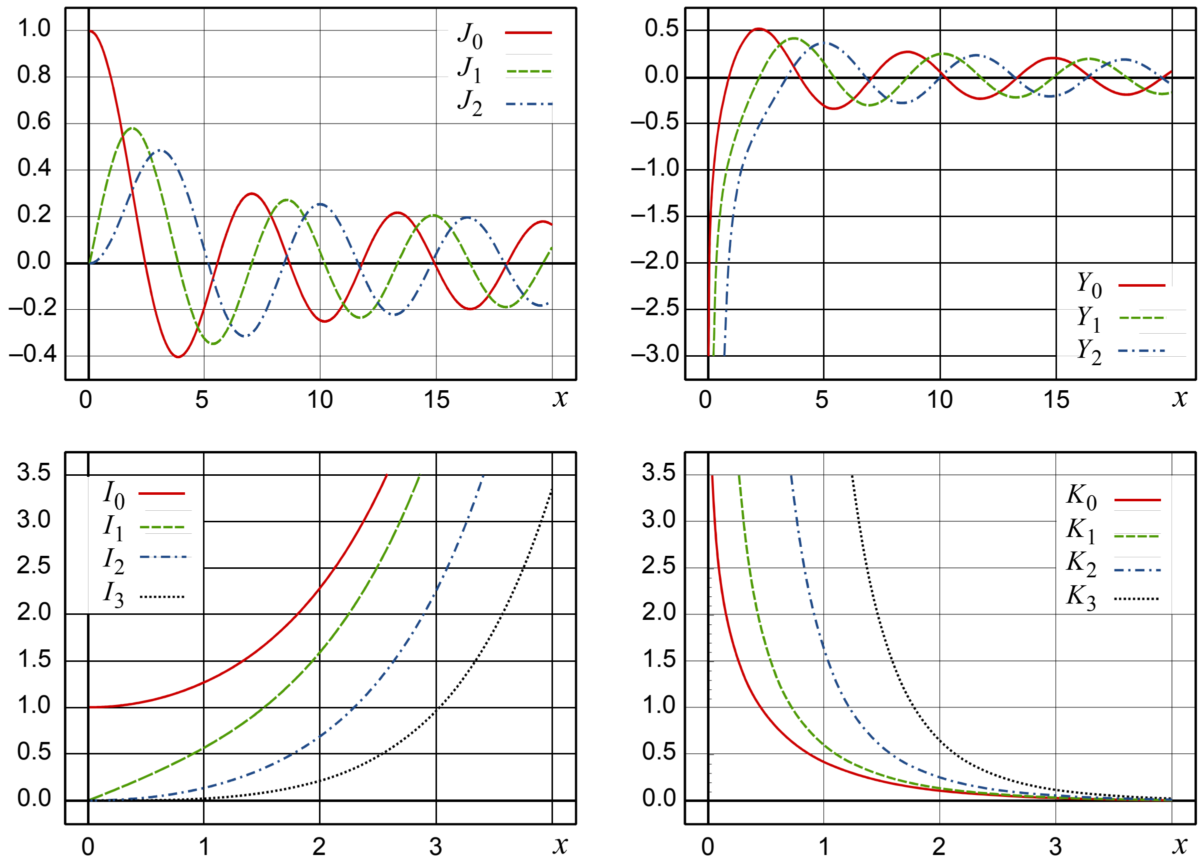
Varianta (1) má kmitavá řešení: Besselovy funkce 1. a 2. druhu)

$$y(x)=c_1J_m(x)+c_2Y_m(x)\,. \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}J_0(x)}{\mathrm{d}x}=-J_1(x)$$

Varianta (2) má monotónní řešení: hyperbolické (modifikované) Besselovy funkce

$$y(x)=c_1I_m(x)+c_2K_m(x)\,. \tag{4}$$



Válcové souřadnice

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Besselovy funkce

Pro práci s Besselovými funkcemi se hodí buď řady, nebo integrální vyjádření:

► $$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} , \tag{5}$$

► $$Y_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(x\sin\theta - n\theta\right) \mathrm{d}\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\mathrm{e}^{mt} + (-1)^m \,\mathrm{e}^{-mt}\right] \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{sh}\,t} \,\mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

► $$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} , \tag{7}$$

► $$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(m-1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m} \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} \left(t^2 - 1\right)^{m-1/2} \mathrm{d}t \tag{8}$$

Užitečné mohou být asymptotické vztahy v okolí počátku ($x \ll 1$):

$$\begin{aligned}
J_m(x) &\approx \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m ,\\
Y_m(x) &\approx \frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m} ; \quad m > 0\,,\\
I_m(x) &\approx \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m ,\\
K_m(x) &\approx \frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m} ; \quad m > 0\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Někdy se také hodí asymptotické vztahy v nekonečnu ($x \gg 1$):

$$\begin{aligned}
J_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\\
Y_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\\
I_m(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{e}^{x} ,\\
K_m(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathrm{e}^{-x} .
\end{aligned} \tag{10}$$

V softwaru Wolfram MATHEMATICA voláme Besselovy funkce příkazy besselj, bessely, besseli, besselk, například besselj[0,x] from x=0 to x=10 vykreslí funkci J_0.