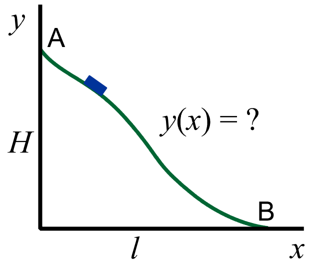
Příklad 1: Brachystochrona



Řešme následující úlohu. Těleso má klouzat po nakloněné rovině obecného tvaru mezi dvěma body A a B, které jsou v různé výšce. Úkolem je nalézt rovnici tvaru nakloněné roviny tak, aby se těleso do bodu B dostalo za nejkratší čas.

Výpočet je obdobný předchozímu:

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v} \qquad \Rightarrow$$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}l}{v(y)} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{v(y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)} \mathrm{d}x \,.$$

Rychlost určíme ze zákona zachování energie

$$mgy + \frac{1}{2} mv^2 = mgH$$

Výsledná doba pohybu je

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} \mathrm{d}x \,. \tag{1.1}$$

Nyní je nutné nalézt křivku $y(x)$, pro kterou nabývá integrál (1.1) svého minima – jde o typickou úlohu variačního počtu. Nyní máme dostatečné matematické znalosti na vyřešení příkladu na brachystochronu z úvodu kapitoly 1.1.2. Úkolem bylo nalézt křivku mezi dvěma body, po které se těleso dostane za nejkratší dobu samovolným klouzáním z bodu A do bodu B, jejichž výškový rozdíl je H. Úloha vedla na hledání minima funkcionálu (1.1)

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} \mathrm{d}x \,.$$

Nezávislou proměnnou v této úloze není čas, ale prostorová souřadnice x. Eulerovy-Lagrangeovy rovnice proto budou mít tvar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \,; \qquad F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} \,.$$

Přímé řešení by bylo značně nevýhodné. Pokud si povšimneme, že nezávislá proměnná x není ve funkcionálu zastoupena, musí se zachovávat „energie“

$$E \equiv \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{\sqrt{2g(H-y)}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} y' - \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} = E_0 \,.$$

Jde o první integrál Eulerových-Lagrangeových rovnic a tedy o diferenciální rovnici prvního řádu. Povšimněte si, že „energie“ není v tomto případě rozdělitelná na „kinetickou“ část s derivacemi hledané funkce a „potenciální“ bez derivací. Po jednoduché úpravě máme

$$E_0 \sqrt{2g(H-y)} \sqrt{1+y'^2} = -1 \,.$$

Výraz umocníme na druhou

$$2E_0^2 g(H-y)(1+y'^2)=1 \qquad \Rightarrow$$

$$H-y=\frac{K}{1+y'^2}\,; \qquad K\equiv\frac{1}{2E_0^2 g}\,.$$

Nejjednodušší integrace je parametrická, tj. substituce y' = tg φ. Parametrické řešení pro y potom je

$$H-y=\frac{K}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad y=H-K\cos^2\varphi\,. \tag{1.2}$$

Zbývá nalézt řešení pro x z definičního vztahu pro substituci, $dy/d\varphi$ vyjádříme z (1.2):

$$y'=\mathrm{tg}\,\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad 2K\sin\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Separací máme

$$dx=2K\cos^2\varphi\, d\varphi\ ,$$

po integraci

$$x=K\varphi+K(\sin 2\varphi)/2+L \tag{1.3}$$

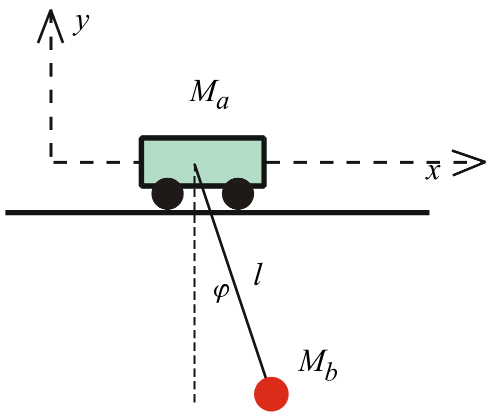
Integrační konstanty K a L ve vztazích (1.2), (1.3) lze určit z toho, že řešení musí procházet body (0, H) a (l, 0). Pro naše účely postačí jen obecné řešení, které je částí cykloidy:

$$x=K\varphi+K(\sin 2\varphi)/2+L\,;$$

$$y=H-K\cos^2\varphi\,.$$

Příklad 2: Rovinné kyvadlo s vodorovně pohyblivým závěsem (sestavení rovnic)

Vodorovně pohyblivý závěs můžeme realizovat např. vozíčkem na kolejničce. Systém má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice zvolíme vodorovnou polohu $x(t)$ vozíčku a úhel $\varphi(t)$ kyvadla. Kartézské souřadnice vozíčku budeme značit indexem a a kartézské souřadnice kyvadla indexem b. Další postup je již standardní:



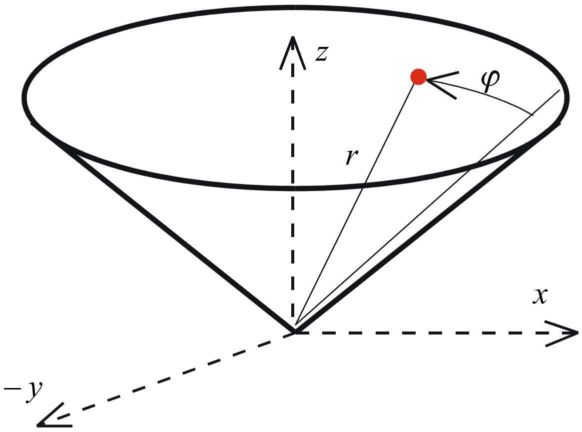
$$x_a(t)=x(t) \quad ; \quad x_b(t)=x(t)+l\sin\varphi(t)\ ,$$

$$y_a(t)=0 \quad ; \quad y_b(t)=-l\cos\varphi(t)\ ;$$

$$L(\varphi,\dot x,\dot\varphi)=\frac{1}{2}M_a\left(\dot x_a^2+\dot y_a^2\right)+\frac{1}{2}M_b\left(\dot x_b^2+\dot y_b^2\right)-M_a g y_a-M_b g y_b\ =$$

$$=\frac{1}{2}M_a\dot x^2+\frac{1}{2}M_b\left(\dot x^2+l^2\dot\varphi^2+2l\dot x\dot\varphi\cos\varphi\right)+M_b g l\cos\varphi\quad .$$

Příklad 3: Pohyb hmotného bodu po kuželové ploše v gravitačním poli (sestavení rovnic)



Pohyb má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenost částice od vrcholu kužele r a polární úhel φ. Využijeme tedy dvě ze sférických souřadnic, třetí – odklon θ_0 od osy z je na kuželové ploše konstantní. Platí

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)\sin\theta_0\,,$$
$$y(t) = r(t)\sin\varphi(t)\sin\theta_0\,,$$
$$z(t) = r(t)\cos\theta_0\,;$$

$$T(r,\dot r,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2)\,;$$
$$V(r) = mgz = mgr\cos\theta_0\,;$$
$$L(r,\dot r,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2) - mgr\cos\theta_0\,;$$

a proto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad\Rightarrow\quad m\ddot r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - mg\cos\theta_0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot \varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot\varphi\sin^2\theta_0) = 0\,.$$

Povšimněte si, že v rovnici pro r na pravé straně vystupuje součet síly odstředivé a příslušné komponenty síly gravitační. Rovnice pro úhel φ není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti.